

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 20



Ярославль 2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 20

Ярославль
Издательство ЯГТУ
2025

УДК 51:378

ББК 22.1

М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 20. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2025. – 184 с.

ISBN 978-5-9914-1073-1

В сборнике представлены научные работы, посвященные актуальным вопросам математики, математического моделирования, а также вопросам методики преподавания математики и проведению математических олимпиад. Приводятся задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ и РГТУ 2024 г. В разделе, посвященном математическому моделированию, представлен широкий круг тематик, посвященных эконометрическим исследованиям, моделированию течения жидкости по трубопроводу, основам метода конечных элементов применительно к стержневым системам и теплотехническим расчетам, моделированию различных технических систем.

УДК 51:378

ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. Н. Жаров (председатель), А. Б. Капанова,
Ю. К. Оленикова, М. Е. Соловьев, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России»; В.И. Бачурин, д-р физ.-мат. наук, доцент базовой кафедры нанотехнологий в элэктронике ФГБОУ ВО «ЯрГУ им. П.Г. Демидова».

ISBN 978-5-9914-1073-1

© Ярославский государственный
технический университет, 2025

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.41:330.4

В. В. Абрамов, Д. В. Юдин

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru,
dmitriy.yudin.2001@mail.ru

ПРОДУКТИВНОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

В работе рассматривается двухфакторная модель односекторной экономики с непрерывным временем. Предполагается, что производственная функция становится отрицательной при достаточно больших значениях факторов производства, динамика факторов зависит от инвестиций в них и от естественной убыли. Получены соотношения для параметров модели, при которых существует устойчивый стационарный режим работы экономики.

Ключевые слова: ограниченная односекторная экономика, система дифференциальных уравнений на плоскости, положение равновесия, устойчивость

V. V. Abramov, D. V. Yudin

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru,
dmitriy.yudin.2001@mail.ru

PRODUCTIVITY OF ONE MODEL OF LIMITED SINGLE-SECTOR ECONOMY

The paper considers a two-factor model of a single-sector economy with continuous time. It is assumed that the production function becomes negative with sufficiently large values of production factors, the dynamics of factors depends on investments in them and on natural loss. The relations for the parameters of the model are obtained, at which there is a stable stationary mode of operation of the economy.

Keywords: limited single-sector economy, system of differential equations on a plane, equilibrium position, stability

Рассмотрим модель односекторной экономики, предложенную в качестве модификации модели Солоу в работе [1],

$$\begin{cases} \dot{K} = P(K, L) = -\mu K + \lambda_1 F, \\ \dot{L} = Q(K, L) = -\nu L + a(\lambda_2 F)^s, \end{cases} \quad (1)$$

где фонды K и труд L – факторы производства; $F = F(K, L)$ – производственная функция; $\mu \in (0, 1)$ – норма амортизации; $\nu > 0$ – коэффициент естественного прироста труда; λ_1, λ_2 – нормы инвестиций, $\lambda_1 + \lambda_2 \in (0; 1]$; $a > 0$ – коэффициент зависимости прироста L от функции инвестиций; $s > 0$ – эластичность прироста L по инвестициям.

В отличие от традиционного подхода, когда модель экономики используется для изучения роста, исследуем модель (1) при слабо изученном условии ограниченности экономики, которое будем ассоциировать с отрицательностью производственной функции при больших объемах факторов. Допустим, в модели (1) производственная функция представляет собой разность мультипликативных функций

$$F(K, L) = A_1 K^{\alpha_1} L^{\beta_1} - A_2 K^{\alpha_2} L^{\beta_2}, \quad (2)$$

где $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, $\beta_2 > \beta_1 > 0$ – показатели эластичности по фондам и труду соответственно, A_1, A_2 – положительные коэффициенты. Заметим, что частный случай модели (1) при $F(K, L) = AKL(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 K)$ и $s = 1$ исследован в работе [2].

Для обеспечения продуктивности экономики, то есть ее долгосрочного функционирования с положительным выпуском, ставится

Задача: Найти соотношения для параметров, при которых система (1)–(2) имеет устойчивое ненулевое положение равновесия факторов производства.

Такая постановка задачи обусловлена именно ограниченностью экономики.

Равновесия системы (1) определяются пересечениями изоклин

$$\begin{cases} -\mu K + \lambda_1 F = 0, \\ -\nu L + a(\lambda_2 F)^s = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из первого уравнения системы (3) получим $F = \frac{\mu K}{\lambda_1}$, подставим во второе уравнение и выразим переменную L

$$L = hK^s, \quad h = \frac{a}{\nu} \left(\frac{\lambda_2 \mu}{\lambda_1} \right)^s. \quad (4)$$

Равенство (4) определяет линию, на которой могут лежать положения равновесия системы (1). С учётом соотношений (2)–(4) составим уравнение для абсциссы K ненулевого положения равновесия системы (1)

$$f(K) = \lambda_1 (A_1 h^{\beta_1} K^{\alpha_1 + s\beta_1 - 1} - A_2 h^{\beta_2} K^{\alpha_2 + s\beta_2 - 1}) - \mu = 0. \quad (5)$$

Оценим количество положительных решений уравнения (5), предполагая, что выполняются условия

$$\gamma_1 = \alpha_1 + s\beta_1 - 1 > 0, \quad \gamma_2 = \alpha_2 + s\beta_2 - 1 > 0. \quad (6)$$

С учетом этого для функции $f(K)$ найдем из условия

$$f'(K) = \lambda_1 \gamma_2 A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_1 - 1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} h^{\beta_1 - \beta_2} - K^{\gamma_2 - \gamma_1} \right) = 0$$

точку

$$K_0 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} h^{\beta_1 - \beta_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}}$$

глобального максимума при $K > 0$. Заметим, что выполняются условия $\lim_{K \rightarrow 0+0} f(K) = -\mu < 0$ и $\lim_{K \rightarrow +\infty} f(K) = -\infty$ в силу оценки $\gamma_1 < \gamma_2$, которая следует из равенства (2). Значит, уравнение (5) имеет не более двух решений. Возможны следующие альтернативы.

Если $f(K_0) < 0$, то уравнение (5) не имеет решений. При этом система (1)–(2) имеет в первой координатной четверти (то есть в естественном фазовом пространстве) лишь нулевое положение равновесия, то есть при этом модель экономики непродуктивна.

Если

$$f(K_0) = \lambda_1 A_1 h^{\frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) - \mu = 0,$$

то уравнение (1) имеет единственное решение.

Однако такая ситуация нецелесообразна для исследования, она является «негрубой», так как соответствует строго определенным значениям норм инвестиций, которые, по сути, являются управляющими параметрами рассматриваемой экономики. Чтобы получить наиболее простое условие для этих параметров, допустим выполнение равенства

$$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 = 0. \quad (7)$$

Далее будем предполагать, что для норм инвестиций выполняется условие $f(K_0) > 0$, которое с учетом равенства (7) примет вид

$$f(K_0) = \lambda_1 A_1 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) - \mu > 0. \quad (8)$$

При этом условии уравнение (5) имеет два положительных решения $K_1 \in (0; K_0)$, $K_2 \in (K_0; +\infty)$. Тогда с учетом равенства (4) система (1)–(2) имеет два ненулевых положения равновесия $(K_1; L_1)$, $(K_2; L_2)$.

Исследуем устойчивость обнаруженных положений равновесия. Для этого составим матрицу коэффициентов системы в вариациях

$$V = \begin{pmatrix} P'_K & P'_L \\ Q'_K & Q'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu + \lambda_1 F'_K & \lambda_1 F'_L \\ as\lambda_2(\lambda_2 F)^{s-1} F'_K & -\nu + as\lambda_2(\lambda_2 F)^{s-1} F'_L \end{pmatrix}.$$

Оценим знаки следа и определителя этой матрицы в каждом положении равновесия, то есть применим условие (5), из которого следует соотношение

$$A_1 h^{\beta_1} K^{\gamma_1} - A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2} = \mu / \lambda_1. \quad (9)$$

Вычислим маржинальные величины производственной функции по факторам производства с учетом соотношений (4) и (9):

$$\begin{aligned} F'_K &= A_1 \alpha_1 K^{\alpha_1-1} L^{\beta_1} - A_2 \alpha_2 K^{\alpha_2-1} L^{\beta_2} = \\ &= \alpha_1 A_1 h^{\beta_1} K^{\gamma_1} - \alpha_2 A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2} = \alpha_1 \mu / \lambda_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2}, \\ F'_L &= A_1 \beta_1 K^{\alpha_1} L^{\beta_1-1} - A_2 \beta_2 K^{\alpha_2} L^{\beta_2-1} = \\ &= (\beta_1 A_1 h^{\beta_1} K^{\gamma_1} - \beta_2 A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2}) h^{-1} K^{1-s} = (\beta_1 \mu / \lambda_1 + (\beta_1 - \beta_2) A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2}) h^{-1} K^{1-s}. \end{aligned}$$

Из системы (3) получим соотношение

$$as\lambda_2(\lambda_2 F)^{s-1} = as \frac{(\lambda_2 F)^s}{F} = as \frac{\nu}{a} \frac{\lambda_1}{\mu} \frac{L}{K} = \frac{sv\lambda_1}{\mu} h K^{s-1}.$$

Тогда след матрицы V имеет следующее значение:

$$\begin{aligned} trV &= -\mu + \lambda_1 F'_K - \nu + as\lambda_2(\lambda_2 F)^{s-1} F'_L = \\ &= \mu(\alpha_1 - 1) + \lambda_1(\alpha_1 - \alpha_2) A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2} - \nu(1 - s\beta_1) - \frac{sv\lambda_1}{\mu} (\beta_1 - \beta_2) A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2} = \\ &= (\mu(\alpha_1 - 1) - \nu(1 - s\beta_1)) + \frac{\lambda_1}{\mu} A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2} (\mu(\alpha_1 - \alpha_2) + sv(\beta_1 - \beta_2)). \end{aligned}$$

Так как $\alpha_2 > \alpha_1$, $\beta_2 > \beta_1$, $\nu > 0$, то $\mu(\alpha_1 - \alpha_2) + sv(\beta_1 - \beta_2) < 0$. Допустим, выполняется оценка

$$\delta = \mu(\alpha_1 - 1) - \nu(1 - s\beta_1) < 0. \quad (10)$$

Итак, для всех положений равновесия системы (1) выполняется условие

$$\text{tr} V < 0. \quad (11)$$

Вычислим определитель матрицы V :

$$\begin{aligned} \det V &= (-\mu + \lambda_1 F'_K)(-\nu + as\lambda_2(\lambda_2 F)^{s-1} F'_L) - as\lambda_2(\lambda_2 F)^{s-1} F'_K \lambda_1 F'_L = \\ &= \mu\nu - \mu as\lambda_2(\lambda_2 F)^{s-1} F'_L - \lambda_1 F'_K \nu = -\nu(\mu\gamma_1 + \lambda_1(\gamma_1 - \gamma_2)A_2 h^{\beta_2} K^{\gamma_2}). \end{aligned}$$

При значении $K = K_0 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} h^{\beta_1 - \beta_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}}$, найденном выше, с учетом условия (7) потребуем, чтобы этот определитель удовлетворял оценке

$$\begin{aligned} \det V_0 &= -\nu(\mu\gamma_1 + \lambda_1(\gamma_1 - \gamma_2)A_2 h^{\beta_2} K_0^{\gamma_2}) = \\ &= -\nu \left(\mu\gamma_1 + \lambda_1(\gamma_1 - \gamma_2)A_2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\sigma = \mu\gamma_1 + \lambda_1(\gamma_1 - \gamma_2)A_2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}} \leq 0. \quad (12)$$

Так как $0 < \lambda_1 < 1$, то для выполнения условий (8) и (12), которые определяют оценку нижней грани нормы инвестиций в наращение фондов, необходимо потребовать выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \frac{\mu\gamma_1}{(\gamma_2 - \gamma_1)A_1 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}} < 1, \\ \lambda_1^{(2)} &= \frac{\mu\gamma_1}{(\gamma_2 - \gamma_1)A_2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}}} < 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $(\det V)'_K > 0$, то для положения равновесия $(K_2; L_2)$ модели (1)–(2), в котором $K_2 \in (K_0; +\infty)$, соответствующий определитель матрицы коэффициентов системы в вариациях удовлетворяет условию

$$0 \leq \det V_0 < \det V_2. \quad (14)$$

Из условий (11) и (14) следует, что положение равновесия $(K_2; L_2)$ устойчиво (на фазовой плоскости системы (1)–(2) это антиседло, то есть узел или фокус).

Вывод. Если для экзогенных параметров односекторной ограниченной экономики выполняются условия (6), (7), (8), (10), (12), (13), то модель (1)–(2) продуктивна.

Условия (8), (12), (13) позволяют ставить задачу оптимизации выпуска или экспорта, соответствующего устойчивому положению равновесия факторов производства за счет варьирования норм инвестиций. Задача такого типа для модели вида (1) с кусочно-линейной производственной функцией решалась в работе [3].

Пример. Рассмотрим модель (1)–(2) с формально выбранными тестовыми значениями экзогенных параметров:

- 1) показатели эластичности: $\alpha_1 = 5/3$; $\alpha_2 = 2$; $\beta_1 = 4/3$; $\beta_2 = 2$; $s = 1/3$;
- 2) коэффициенты приращения факторов производства: $\mu = 0,01$; $\nu = 0,05$; $a = 0,3$;
- 3) коэффициенты производственной функции: $A_1 = 80$; $A_2 = 15$;
- 4) нормы инвестиций: $\lambda_1 = 0,1$; $\lambda_2 = 0,2$.

Схема расположения семейства изоквант показана на рис. 1.

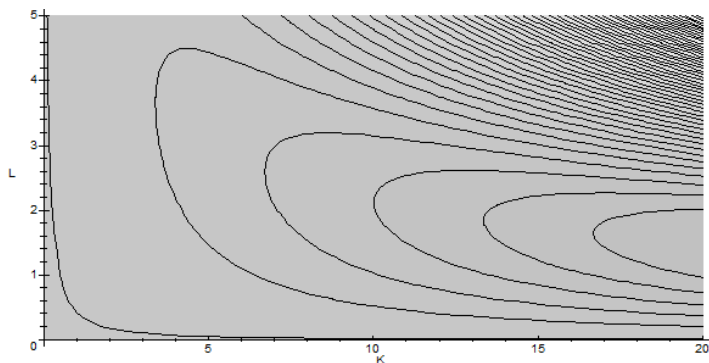


Рис. 1. Пример расположения семейства изоквант функции вида (2)

Для модели с указанными параметрами выполняются условия вида (6), (7), (8), в частности: $\gamma_1 = 5/3$; $\gamma_2 = 10/9$; $f(K_0) \approx 33,701934$. При этом $f(K) = 15,329472 \cdot K^{10/9} - 3,978754 \cdot K^3 - 0,01$ – вид функции в левой части уравнения (5), ее график представлен на рис. 2. Система (1)–(2) в данном случае имеет два ненулевых положения равновесия: $(K_1; L_1) \approx (0,001367; 0.180734)$, $(K_2; L_2) \approx (11,333652; 3,658344)$.

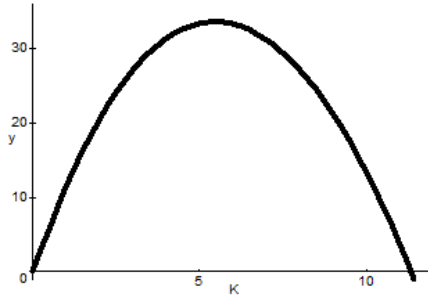


Рис. 2. Пример графика функции в левой части уравнения (5) при условиях (6), (7), (8)

Кроме того, выполняются условия (10), (12), (13): $\delta \approx -0,021111$; $\sigma \approx -37,4466$; $\lambda_1^{(1)} \approx 0,00002$; $\lambda_1^{(2)} \approx 0,00003$. При этом, оценив знаки следа $\text{tr}V_i$, определителя $\det V_i$ и дискриминанта $\text{discr}V_i$ соответствующей матрицы коэффициентов системы в вариациях для каждого ненулевого положения равновесия, в данном примере имеем:

1) $(K_1; L_1)$ – положение равновесия типа «седло», так как $\text{tr}V_1 \approx -0,021208$; $\det V_1 \approx -0,000554$; $\text{discr}V_1 \approx 0,002665$;

2) $(K_2; L_2)$ – устойчивое положение равновесия типа «узел», так как $\text{tr}V_2 \approx -328,667669$; $\det V_2 \approx 6,31951$; $\text{discr}V_1 \approx 107997,1586$.

Область устойчивости продуктивного состояния $(K_2; L_2)$ производственных факторов ограничена исходящими сепаратрисами седла $(K_1; L_1)$. Расположение траекторий изменения факторов в окрестности $(K_2; L_2)$ показано на рис. 3. Здесь видим исключительное направление траекторий, обусловленное расположением изокванты $F(K, L) = 0$, ограничивающей область продуктивности данной модели экономики.

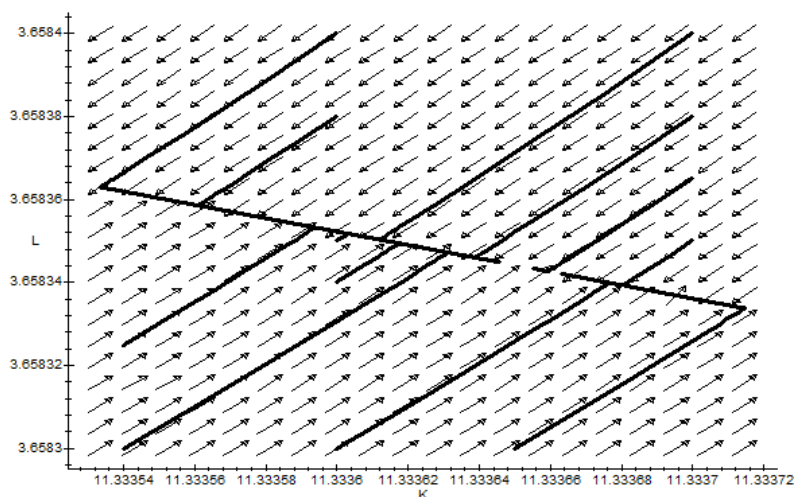


Рис. 3. Пример расположения траекторий факторов модели (1)–(2) в окрестности продуктивного положения равновесия

Проведенные вычисления позволяют оценить показатели качества работы экономики. Предельные значения выпуска и экспорта, на которых с течением времени стабилизируется экономика, соответственно равны

$$F(K_2; L_2) \approx 1,13337; (1 - \lambda_1 - \lambda_2)F(K_2; L_2) \approx 0,793359.$$

На основании проведенных компьютерных вычислений можно сделать

Замечание: полученные в данном примере качественные выводы о положениях равновесия модели (1)–(2) справедливы в широком диапазоне параметров, удовлетворяющих условиям (6), (7), (8), (10), (12), (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В.В.* Качественное исследование модели односекторной экономики // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2007. № 12. С. 11–15.
2. *Абрамов В.В.* Стационарные состояния в модели односекторной экономики // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. 2021. Вып. 2. С. 4–9.
3. *Абрамов В.В.* Модель ограниченной односекторной экономики / В.В. Абрамов, Д.В. Юдин // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. 2024. Вып. 6. С. 7–15.

УДК 515.177

М. А. Башкин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

ОДНОРОДНОЕ НЕРАСЩЕПИМОЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ, СВЯЗАННОЕ С РАССЛОЕНИЕМ $E(9, 5, 4, 2)$

В работе изложены результаты классификации однородных комплексных нерасщепимых супермногообразий, связанных с комплексной проективной прямой в случае, когда соответствующее расщепимое супермногообразие определяется голоморфным векторным расслоением с сигнатурой 9, 5, 4, 2.

Ключевые слова: однородное нерасщепимое супермногообразие, ретракт, касательный пучок

М. А. Bashkin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

NON-SPLIT HOMOGENEOUS SUPERMANIFOLD ASSOCIATED WITH THE BUNDLE $E(9, 5, 4, 2)$

The paper presents the results of the classification of complex non-split homogeneous supermanifolds associated with a complex projective line in the case when the corresponding split supermanifold is determined by a holomorphic vector bundle with signature 9, 5, 4, 2.

Keywords: non-split homogeneous supermanifolds, retract, tangent sheaf

Рассмотрим голоморфное векторное расслоение

$$E(9,5,4,2) = L_{-9} \oplus L_{-5} \oplus L_{-4} \oplus L_{-2}$$

над комплексной проективной прямой $\mathbf{CP}^1$ [1, 2], где все L_k – голоморфные линейные расслоения степени $k \geq 0$. Тогда оно определяет расщепимое супермногообразие $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, где $\mathcal{O}_{\text{gr}}$ – пучок коммутативных супералгебр на $\mathbf{CP}^1$ [3]. Супермногообразие называется однородным, если супералгебра голоморфных векторных полей транзитивна на нем, т. е. порождает касательное суперпространство в каждой его точке [4].

Пусть $\mathbf{CP}^1$ покрыто двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и y соответственно. В $U_0 \cap U_1$ имеем:

$$y = x^{-1}, \quad \eta_1 = x^{-9} \xi_1, \quad \eta_2 = x^{-5} \xi_2, \quad \eta_3 = x^{-4} \xi_3, \quad \eta_4 = x^{-2} \xi_4,$$

где ξ_i и η_i ($i = 1, \dots, 4$) – базисные сечения расслоения $\mathbf{E}(9,5,4,2)$ над U_0 и U_1 .

Обозначим через T_{gr} – градуированный касательный пучок на рассматриваемом супермногообразии и $\nu(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{gr})$ – супералгебру Ли векторных полей на нем. Рассмотрим точную последовательность (см. [3])

$$0 \rightarrow \text{End } \mathbf{E} \rightarrow \nu(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{gr})_0 \xrightarrow{\beta} sl_2(\mathbf{C}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Подалгебра $\alpha \subset \nu(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{gr})_0$ расщепляет последовательность (1), если β изоморфно отображает α на $sl_2(\mathbf{C})$. В этом случае имеем представление $\nu(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{gr})_0$ в виде полупрямой суммы $\text{End } \mathbf{E} \oplus \alpha$. В работе [3] показано, что супермногообразие является четно-однородным тогда и только тогда, когда на него поднимается подалгебра α , расщепляющая последовательность (1). Говорят, что супермногообразие $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$ является четно-однородным относительно α . Из [4] следует, что с точностью до автоморфизма из $\text{Aut } \mathbf{E}$ существует одна подалгебра $\alpha \cong sl_2(\mathbf{C})$, расщепляющая (1). В выбранной системе координат ее базис имеет вид

$$e = \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 9\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 5\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 4\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4},$$

$$f = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 9x\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 5x\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 4x\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2x\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4}.$$

Рассмотрим подпучок $\text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{gr} = \exp((T_{gr})_2 \oplus (T_{gr})_4)$ пучка $\text{Aut } \mathcal{O}_{gr}$. Гринном (P. Green) доказано, что множество супермногообразий с заданным ретрактом $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{gr})$ изоморфно множеству орбит группы $\text{Aut } \mathbf{E}$ на множестве $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{gr})$. Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии $U = \{U_0, U_1\}$.

Утверждение 1 ([2]). *Предположим, что $n < 6$ и $H^0(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_2) = \{0\}$. Пусть заданы такие подпространства $Q_{2p} \subset Z^1(U, (T_{gr})_2)$ ($p = 1, 2$), что*

каждый класс когомологий из $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)$ содержит ровно по одному коциклу из Q_{2p} ($p = 1, 2$). Тогда любой класс когомологий из $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}O_{\text{gr}})$ представляется единственным коциклом вида $z = \exp(u^2 + u^4)$, где $u^2 \in Q_2, u^4 \in Q_4$.

Будем задавать супермногообразие $(\mathbf{CP}^1, O)$ коциклом $u^2 + u^4$, подразумевая, что $(\mathbf{CP}^1, O)$ соответствует коциклу $z = \exp(u^2 + u^4)$.

Используя метод, изложенный в разделе 2 работы [3], можно доказать, что справедливо равенство $H^0(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$, и вычислить базис пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_q)$, $q = 2, 4$.

Проведем исследование рассматриваемых супермногообразий на четно-однородность. Обозначим через $H^1(\mathbf{CP}^1, T_{\text{gr}})^\alpha$ множество α -инвариантных классов когомологий.

Утверждение 2. *Базис пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$, может быть представлен следующими коциклами:* $x^{-1}\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial x}, x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$.

Кроме того $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_4)^\alpha = \{0\}$.

Пусть $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)}O_{\text{gr}} \rightarrow (T_{\text{gr}})_2$ – гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма α 2-компоненту элемента $\log \alpha$ в $(T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4$. Из утверждений 1 и 2 можно вывести

Утверждение 3. *Если α – подалгебра, расщепляющая последовательность (1) и если $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}O_{\text{gr}})^\alpha$ – множество классов, определяющих четно-однородные относительно α супермногообразия, то λ_2^* биективно отображает это множество на $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$.*

Тогда четно-однородные относительно α супермногообразия можно представить коциклами вида $u^2 + u^4$, где класс $[u^2]$ α -инвариантен, а класс $[u^4]$ может быть определен с помощью предложения 5.1 из [3]. Заметим, что α -инвариантные классы $[u^2]$ описаны ранее в утверждении 2. Проверив, что для них $[u^2; u^2] = 0$, из предложения 5.1 работы [3] получаем, что класс $[u^4]$ также должен быть α -инвариантным.

Утверждение 4. *Для любой расщепляющей подалгебры α четно-однородные относительно α супермногообразия задаются коциклами из утверждения 2.*

Исследуем на однородность полученные четно-однородные супермногообразия, используя

Утверждение 5 ([2]). *Пусть выполнены условия утверждения 1, и пусть супермногообразие $(\mathbf{CP}^1, O)$ является четно-однородным относи-*

тельно α . Супермногообразие $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ однородно тогда и только тогда, когда векторные поля $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ для $j = 1, \dots, 4$ поднимаются на $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$.

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. Для сигнатуры $9, 5, 4, 2$ существует с точностью до изоморфизма одно однородное нерасщепимое супермногообразие, представимое коциклом $x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$.

Доказательство аналогично, приведенному в [1]. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башкин М.А. Классификация однородных нерасщепимых супермногообразий с сигнатурой $9,6,3,2$ // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 10–13.
2. Башкин М.А. Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вестник РГАТУ имени П.А. Соловьева. 2015. № 3 (34). С. 125–130.
3. Bunegina V.A. Homogeneous supermanifolds associated with the complex projective line / V.A. Bunegina, A.L. Onishchik // J. Math. Sci. 1996. Vol. 82. P. 3503 – 3527.
4. Onishchik A.L. A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. Vol. 16. P. 309–333.

УДК 517

Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов, С. А. Старостина

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru, sardana-starostina@mail.ru

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

В работе доказывается теорема о неподвижной точке нерастягивающего отображения, которое переводит вершины выпуклого многоугольника на комплексной плоскости внутрь этого многоугольника. Дается оценка удаленности неподвижных точек от многоугольника. Приведены примеры, уточняющие теорему.

Ключевые слова: неподвижная точка отображения, нерастягивающее отображение, сжимающее отображение, принцип сжимающих отображений, модуль комплексного числа, диаметр множества, выпуклый многоугольник, расстояние между множествами

N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov, S. A. Starostina

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru, sardana-starostina@mail.ru

ABOUT FIXED POINTS OF NONEXPANSIVE MAPPINGS OF THE PLANE

This article is proved the theorem about a fixed point of nonexpansive mapping that maps the vertices of a convex polygon in the complex plane to the interior of that polygon. An estimation is given of the distance of fixed points from the polygon. Examples are given to clarify the theorem.

Keywords: fixed point of mapping, nonexpansive mapping, contractive mapping, the contractive mapping principle, modulus of a complex number, diameter of a set, convex polygon, distance between sets

Пусть $f(z)$ – функция комплексной переменной $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, i – мнимая единица; $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел,

отождествляемое с комплексной плоскостью. Отображение (функция) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *нерастягивающим*, если $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$ для любых $u, v \in \mathbb{C}$. Отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *сжимающим*, если существует константа $k \in (0, 1)$ такая, что $|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|$ для любых $u, v \in \mathbb{C}$. Точка $w \in \mathbb{C}$ называется *неподвижной точкой* отображения $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, если $f(w) = w$. Известно, что сжатие замкнутого подмножества банахова пространства в себя имеет единственную неподвижную точку (принцип сжимающих отображений С. Банаха [1]). Для растягивающих отображений это не так. Например, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z + z_0$, где $z_0 \neq 0$, — растягивающее отображение, но $f(z) \neq z$ ни при каком $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 1. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — растягивающее отображение, $M \subset \mathbb{C}$ — ограниченный выпуклый замкнутый многоугольник с непустой внутренностью $\overset{\circ}{M}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $m \geq 3$ — множество всех вершин M и $f(A) \subset \overset{\circ}{M}$. Тогда f имеет в $\mathbb{C}$ неподвижную точку.

При доказательстве теоремы 1 будем использовать следующую простую лемму.

Лемма 1. Если центр круга радиуса $R > 0$ лежит вне кругового сегмента с хордой длины l , то для высоты h этого сегмента справедливо соотношение

$$h = R - \sqrt{R^2 - l^2/4} = \frac{l^2}{4R + \sqrt{16R^2 - 4l^2}} \leq \frac{l^2}{4R}.$$

Доказательство теоремы 1. Поскольку $f(A)$ и ∂M (граница M) компактны и $f(A) \subset \overset{\circ}{M}$, то

$$\mu = \rho(f(A), \partial M) = \min\{|c - b| : c \in f(A), b \in \partial M\} > 0,$$

где $\rho(F, G)$ — расстояние между компактами F и G .

Положим $g_n = \frac{n}{n+1}f$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $g_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — сжатие, имеющее по теореме Банаха [3] единственную неподвижную точку $z_n \in \mathbb{C}$.

Пусть $\max_{1 \leq j \leq m} |f(a_j)| = L$, $N = [2L/\mu]$. Тогда для всех $n > N$ $\rho(g_n(A), \partial M) \geq \mu/2$. Действительно, для любого $b \in \partial M$ и $j = 1, 2, \dots, m$

$$|g_n(a_j) - b| = \left| \frac{n}{n+1} f(a_j) - b \right| \geq |f(a_j) - b| - \frac{|f(a_j)|}{n+1} \geq \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2}.$$

Предположим, что последовательность z_n неограничена. Тогда найдутся $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, для которых $z_n \notin M$. Для каждой такой точки z_n найдем в A ближайшую к z_n точку, пусть это будет точка a_k . Положим $r_n = |z_n - a_k|$, $K(z_n, r_n) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_n| \leq r_n\}$. Поскольку

$$|f(a_k) - g_n(a_k)| = \left| f(a_k) - \frac{n}{n+1} f(a_k) \right| = \frac{|f(a_k)|}{n+1} < \frac{\mu}{2},$$

то $g_n(a_k) \in \overset{\circ}{M}$. Но

$$|z_n - g_n(a_k)| = |g_n(z_n) - g_n(a_k)| \leq \frac{n}{n+1} |z_n - a_k| = \frac{n}{n+1} r_n < r_n.$$

Поэтому $g_n(a_k) \in K(z_n, r_n)$, и, значит, $K(z_n, r_n) \cap \overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. Это возможно только в том случае, когда на $\partial M \cap \partial K(z_n, r_n)$ существует еще одна точка b , отличная от точки a_k . В силу выбора точки a_k , точка b должна лежать на одной из сторон многоугольника M , выходящей из точки a_k . Пусть это будет отрезок $[a_k, a_j]$. Тогда $|a_k - b| \leq |a_k - a_j| \leq d$, где d — диаметр M .

Рассмотрим круговой сегмент, отсекаемый хордой $[a_k, b]$ от круга $K(z_n, r_n)$. Этот сегмент не содержит точку z_n . По лемме 1 высота этого сегмента h_n удовлетворяет неравенству

$$h_n \leq \frac{|a_k - b|^2}{4r_n} \leq \frac{d^2}{4r_n}.$$

Если бы последовательность z_n была неограничена, то нашлось бы $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > N$ и $h_n < \frac{\mu}{4}$. Поскольку $g_n(a_k) \in K(z_n, r_n) \cap \overset{\circ}{M}$, то $\rho(g_n(a_k), \partial M) < \mu/4$. Но это противоречит ранее полученной оценке $\rho(g_n(A), \partial M) \geq \mu/2$. Значит, последовательность z_n ограничена.

Поскольку последовательность z_n ограничена, то из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{z_{n(p)}\}$ (см., например, [2], с. 31).

Пусть $z_{n(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \tilde{z}$. Переходя при $p \rightarrow +\infty$ к пределу в равенстве

$$z_{n(p)} = \frac{n(p)}{n(p)+1} f(z_{n(p)}), \text{ получаем } \tilde{z} = f(\tilde{z}). \text{ Теорема доказана. } \blacksquare$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы 1 неподвижная точка $\tilde{z}$ может находиться сколь угодно далеко от многоугольника M . Нам потребуется следующая

Лемма 2. При любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \right| \leq \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2}. \quad (1)$$

Доказательство. Положим $u = \alpha + \beta i$, $v = \gamma + \delta i$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$\left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \right| = ||u| - |v|| \leq |u - v| = \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2}. \quad \blacksquare$$

Пример 1. Пусть $f(x + iy) = \sqrt{\lambda^2 x^2 + (|y| - 1)^2}$, $0 < \lambda \leq 1$; M – треугольник с вершинами $a_1 = 0$, $a_2 = 2 + i$, $a_3 = 2 - i$. Тогда $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – растягивающее отображение. Действительно, применяя неравенство (1), для любых $z_k = x_k + iy_k \in$, $k = 1, 2$, и $\lambda \in (0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + (|y_1| - 1)^2} - \sqrt{\lambda^2 x_2^2 + (|y_2| - 1)^2} \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\lambda^2 (x_1 - x_2)^2 + (|y_1| - |y_2|)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом $f(0) = 1$, $f(2 \pm i) = 2\lambda$. Поэтому $f(A) \subset \overset{\circ}{M}$ при $\lambda \in (0, 1)$. Поскольку $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, то единственную неподвижную точку отображения находим, решая уравнение

$$\sqrt{\lambda^2 x^2 + 1} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Таким образом, единственная неподвижная точка отображения $\tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \notin M$ при $\frac{\sqrt{3}}{2} < \lambda < 1$. Причем $\tilde{z} \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow 1 - 0$.

Множество неподвижных точек отображения f будем обозначать $\text{Fix } f$. При формулировке и доказательстве следующей теоремы будем использовать обозначения теоремы 1. К каждой стороне $[a_k, a_{k+1}]$,

$k=1,2,\dots,m$, ($a_{m+1}=a_1$), многоугольника M в ее конечных точках проведем полупрямые перпендикулярные этой стороне. Эти полупрямые разобьют внешность многоугольника на открытые полуполосы $P_1,\dots,P_m$ и замкнутые плоские углы между ними $S_1,\dots,S_m$ ($P_k \cap M = \emptyset$, $k=1,2,\dots,m$) . Следующая теорема характеризует расположение неподвижных точек отображения f и дает оценку удаленности их от многоугольника M .

Теорема 2. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — нестягивающее отображение, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Тогда

- 1) $\text{Fix } f$ — замкнутое множество;
- 2) $\text{Fix } f \cap \left(\bigcup_k S_k\right) = \emptyset$;
- 3) $\max \{\rho(z, M) : z \in \text{Fix } f\} \leq \max \left\{ \frac{d}{2}, \frac{d^2}{8\mu} - \frac{\mu}{2} \right\}$, где $d = \text{diam } M$.

Доказательство.

1) Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек из $\text{Fix } f$, сходящаяся к точке z_0 . Поскольку отображение f непрерывно, то переходя в равенстве $f(z_n) = z_n$ к пределу, получим $f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.

2) Предположим, что $z_0 \in S_k \cap \text{Fix } f$. В этом случае вершина плоского угла S_k , пусть это будет точка a_k , является ближайшей к z_0 точкой многоугольника, при этом — единственной. Но $|z_0 - f(a_k)| = |f(z_0) - f(a_k)| \leq |z_0 - a_k|$, что невозможно, поскольку $f(a_k) \in \overset{\circ}{M}$.

3) Предположим, что $z_0 \in P_k \cap \text{Fix } f$, $\rho(z_0, M) \geq \frac{d}{2}$, где P_k — полуполоса, примыкающая к стороне $[a_k, a_{k+1}]$. Пусть, например, $|z_0 - a_k| \leq |z_0 - a_{k+1}|$. Рассмотрим круг $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$, где $R = |z_0 - a_k|$ и его сегмент $M \cap K$ с хордой длины $l \leq |a_k - a_{k+1}| \leq d$. Поскольку $|z_0 - f(a_k)| = |f(z_0) - f(a_k)| \leq |z_0 - a_k|$, то $f(a_k) \in K$, и, значит, для высоты сегмента h выполняется неравенство $\mu = \rho(f(A), \partial M) \leq h$. По лемме 1 $\mu \leq h = R - \sqrt{R^2 - l^2/4} \leq R - \sqrt{R^2 - d^2/4}$. Отсюда $\sqrt{R^2 - d^2/4} \leq R - \mu$, где $R = |z_0 - a_k| \geq \frac{d}{2} \geq \mu$. Решая неравенство $\sqrt{R^2 - d^2/4} \leq R - \mu$, получим

$R \leq \frac{d^2}{8\mu} + \frac{\mu}{2}$. Следовательно, $\rho(z_0, M) \leq R - \mu \leq \frac{d^2}{8\mu} - \frac{\mu}{2}$. Заметим, что

$$\frac{d^2}{8\mu} + \frac{\mu}{2} \geq 2\sqrt{\frac{d^2}{8\mu} \cdot \frac{\mu}{2}} = \frac{d}{2}. \quad \blacksquare$$

Следствие. В предположениях теоремы 1 множество $\text{Fix } f$ является компактом.

Проиллюстрируем теорему 1 еще двумя примерами.

Пример 2 показывает, что условие $f(A) \subset \overset{\circ}{M}$ нельзя заменить на более слабое условие $f(A) \subset M$.

Пример 2. Пусть $f(z) = \sqrt{x^2 + (|y| - 1)^2}$; M — прямоугольник с вершинами $a_1 = -i$, $a_2 = i$, $a_3 = 1 - i$, $a_4 = 1 + i$. Поскольку неравенство (2), доказанное выше, справедливо и при $\lambda = 1$, то $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — нерастягивающее отображение. При этом $f(\pm i) = 0$, $f(1 \pm i) = 1$. Так что $f(A) \subset M$. А неподвижных точек у этого отображения нет. Действительно, поскольку $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, то неподвижная точка $\tilde{z} = x + iy$ отображения должна была бы удовлетворять системе

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = x, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *липшицевым с константой k* (пишем $f \in \text{Lip } k$), если

$$k = \sup \left\{ \left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right| : u, v \in \mathbb{C}, u \neq v \right\} < +\infty.$$

Следующий пример показывает, что утверждение теоремы 1 неверно для липшицевых отображений с константой $k > 1$, сколь угодно близко к 1.

Пример 3. Пусть $s > 0$, $p = (\sqrt{5} - 1)/s$; M — треугольник с вершинами $a_1 = 0$, $a_2 = 2 + si$, $a_3 = 2 - si$, $f(z) = \sqrt{1 + x^2} - p|y|$. Тогда $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 1$, то есть $f(A) \subset \overset{\circ}{M}$. Используя неравенство Коши-Шварца, для любых $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, получаем

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \sqrt{1+x_1^2} - \sqrt{1+x_2^2} - p(|y_1| - |y_2|) \right| \leq \\ &\leq |x_1 - x_2| + p|y_1 - y_2| \leq \sqrt{1+p^2} |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Следовательно, $f \in \text{Lip } k$, где $k \leq \sqrt{1+p^2}$. Кроме того, отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ не имеет неподвижных точек, поскольку

$$f(x+iy) = x+iy \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x^2} = x, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Поэтому, в силу теоремы 1, $k \in \left(1, \sqrt{1+p^2}\right]$. Если $s \rightarrow +\infty$, то $p \rightarrow +0$, и, значит, $k \rightarrow 1+0$.

Замечание. Теорема 1 справедлива и для двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x, y \in \mathbb{R}$.

Действительно, отображение $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $Tz = (x, y)$, где $z = x + iy$, является линейной изометрией. Поэтому для нерастягивающего отображения $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое переводит вершины многоугольника $M \subset \mathbb{R}^2$ внутрь M , получим, что нерастягивающее отображение $T^{-1}fT: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ переводит вершины многоугольника $T^{-1}M$ внутрь этого многоугольника. Тогда, по теореме 1, существует $z_0 \in \mathbb{C}$ такое, что $(T^{-1}fT)(z_0) = z_0$. Следовательно, $f(Tz_0) = Tz_0$.

Следующий пример показывает, что теорема 1 не переносится на неевклидову плоскость.

Пример 4. Введем в $\mathbb{R}^2$ норму $\|\cdot\|_1$: $\|u\|_1 = |x| + |y|$, где $u = (x, y)$, и рассмотрим отображение f такое, что

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(x - |y| + \sqrt{x^2 + (|y| - 2)^2}, 0 \right); (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда $f: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ — нерастягивающее отображение, так как для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ в силу леммы 2 имеем

$$\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_1 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left| x_1 - x_2 - (|y_1| - |y_2|) + \left(\sqrt{x_1^2 + (|y_1| - 2)^2} - \sqrt{x_1^2 + (|y_1| - 2)^2} \right) \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right) \leq \\
 &\leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1.
 \end{aligned}$$

Пусть M – треугольник с вершинами $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (2, 2)$, $a_3 = (2, -2)$. При этом $f(A) = \{(1, 0)\} \subset \overset{\circ}{M}$ и f не имеет неподвижных точек, поскольку

$$f(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4}) = x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 572 с.
2. Прасолов В.В. Математический анализ. Теоремы и задачи. М.: МЦНМО, 2022. 480 с.
3. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals // Fund. Math. 1922. Vol. 3, iss. 1. P. 133–181.

УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О БИФУРКАЦИЯХ КУСОЧНО-ГЛАДКОГО
ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ
ЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ,
КАСАЮЩЕЙСЯ ЛИНИЙ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ**

Рассматривается кусочно-гладкое векторное поле X на плоскости, имеющее периодическую траекторию Γ , касающуюся линий переключения в двух особых точках типа развилка и не содержащую других особых точек. Пусть Γ имеет полукрестность, в которой на полутрансверсали к Γ определена функция последования P , $P(0) = 0$. Для типичных двухпараметрических деформаций поля X в случаях $P'(0) > 1$ и $P'(0) < 1$ описаны бифуркации Γ .

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, особая точка, периодическая траектория, бифуркация

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON BIFURCATIONS OF A PIECEWISE SMOOTH
VECTOR FIELD IN A NEIGHBORHOOD
OF ITS PERIODIC ORBIT TANGENT TO SWITCHING LINES**

We consider a piecewise smooth vector field X on the plane with a periodic orbit Γ that is tangent to the switching lines at two singular points of the fork type and does not contain other singular points. Let Γ have a semi-neighborhood in which a Poincare map P , $P(0)=0$, is defined on a semi-transversal to Γ . For generic two-parameter deformations of the field X in the cases $P'(0)>1$ and $P'(0)<1$, bifurcations of Γ are described.

Keywords: piecewise smooth vector field, singular point, periodic orbit, bifurcation

Введение. Исследования бифуркаций кусочно-гладких динамических систем на плоскости имеет уже давнюю историю [1, 2]. Бифуркации рождения периодической траектории из особой точки и другие локальные бифуркации в типичных семействах кусочно-гладких систем на плоскости с одним и двумя параметрами изучались в работах [2–16]. Бифуркации сепаратрисных контуров и периодических траекторий рассматривались в

[14–30]. Однако некоторые бифуркации в типичных двухпараметрических семействах пока не описаны.

В настоящей работе рассматриваются бифуркации в окрестности периодической траектории Γ , содержащей две особые точки типа «развилка» в случаях, когда все отрицательные (положительные) полутраектории, начинающиеся в некоторой полуокрестности Γ , не проходят через особые точки и $\alpha(\omega)$ -предельны к Γ .

1. Предварительные сведения. Пусть компактное множество $M \subset \mathbb{R}^2$ с C^∞ -гладкой границей представлено в виде объединения компактных подмножеств M_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ с C^∞ -гладкой границей ∂M_i , таких, что

$$M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j, \text{ если } i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

Обозначим $D := \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, Множества $M_{ij} := M_i \cap M_j \neq \emptyset$ – C^∞ -гладкие одномерные подмногообразия $\mathbb{R}^2$.

Кусочно-гладким векторным полем на множестве M с разбиением D назовем класс всех таких векторных полей $X_* : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ на M , что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ в точках $x \in \text{int } M_i$ $X_*(x) = X^i(x)$, где X^i – C^r -векторное поле на M_i ($r \geq 1$). Обозначим его $X = (X^1, \dots, X^n)$, а множество таких полей – $\mathcal{X}^r(M, D)$. Траектории поля X определим как траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \chi(x)$, где $\chi(x) = \{X^i(x)\}$ в случае $x \in \text{int } M_i \cup (M_i \cap \partial M)$ и $\chi(x) = \text{co}\{X^i(x), X^j(x)\}$ в случае $x \in M_{ij}$ [2]. Если для точки $x \in M_{ij}$ $\chi(x)$ содержит вектор, касательный к M_{ij} , то будем его обозначать $X^{i,j}(x)$.

Особыми точками поля X будем называть особые точки векторных полей X^i , точки касания этих полей с ∂M_i и точки $a \in M_{ij}$ в которых $X^{i,j}(a) = 0$.

Выберем C^∞ -координаты x_1, x_2 в окрестности $V(a)$ особой точки $a \in M_{ij}$ так, чтобы эта точка имела координаты $x_1 = x_2 = 0$, а $M_i \cap V(a)$ ($M_j \cap V(a)$) задавалось неравенством $x_2 \geq 0$ ($x_2 \leq 0$). В этих координатах $X^m(x) = P_{m1}(x_1, x_2)\partial/\partial x_1 + P_{m2}(x_1, x_2)\partial/\partial x_2$, где $P_{m1}, P_{m2} \in C^r$ ($m = i, j$). Особую точку a назовем *сходящейся (расходящейся) развилкой*, если $P_{i2}(0,0) = 0$, $P_{i1}(0,0)\partial P_{i2}(0,0)/\partial x_1 > 0$, а $P_{j2}(0,0) > 0$ ($P_{j2}(0,0) < 0$) (рис. 1).

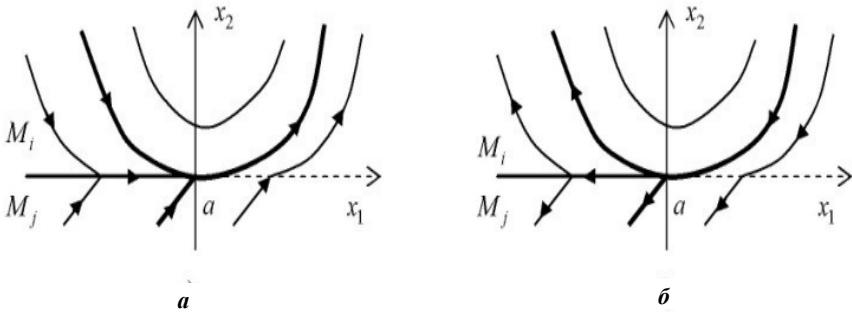


Рис. 1. Сходящаяся (а) и расходящаяся (б) развилки

Из сходящейся (расходящейся) развилки a выходят положительная и отрицательная полутраектории, касающиеся M_{ij} в точке a . Назовем их *выходящей и входящей касательной сепаратрисами* развилки. Из точки a также выходит отрицательная (положительная) полутраектория, не касающаяся M_{ij} в точке a – *трансверсальная сепаратриса* развилки a .

2. Условие. Рассмотрим двухпараметрическое семейство векторных полей из $\mathcal{X}^r(M, D)$ – C^r -отображение

$$\mathbb{R}^2 \ni \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto X_\varepsilon = (X_\varepsilon^1, \dots, X_\varepsilon^n) \in \mathcal{X}^r(M, D).$$

Будем предполагать, что выполняются сформулированные ниже условия (У-1) – (У-5).

(У-1) Векторное поле X_0 имеет периодическую траекторию Γ , проходящую через две развилки a_1^0 и a_2^0 , не содержащую других особых точек и содержащую касательные сепаратрисы этих развилки.

Множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент C_+ и C_- .

(У-2) Компонента C_+ не пересекается с трансверсальными сепаратрисами развилки a_1^0 и a_2^0 .

Условие (У-3) будет в двух вариантах:

(У-3А) Обе точки a_1^0 и a_2^0 – сходящиеся развилки;

(У-3Б) Точка a_1^0 (a_2^0) – сходящаяся (расходящаяся) развилка.

Вариант, в котором обе точки a_1^0 и a_2^0 – расходящиеся развилки, сводится к **(У-3А)** переходом к семейству противоположных векторных полей $-X_\varepsilon = (-X_\varepsilon^1, \dots, -X_\varepsilon^n)$.

Будем считать, что развилка $a_1^0 \in M_{i_{j_1}}$, а ее трансверсальная сепаратриса начинается в M_{j_1} .

Выберем C^r -вложения $\eta_k : (-1, 1) \rightarrow \text{int } M_{i_k}$ ($k = 1, 2$), трансверсальные траекториям поля X^i , такие, что, точка $\eta_1(0)$ ($\eta_2(0)$) принадлежит входящей (выходящей) касательной сепаратрисе развилки a_1^0 , а $\eta_k(0, 1) \in C_+$.

Если окрестность нуля $E^1 \subset \mathbb{R}^2$ достаточно мала, то поле X_ε , $\varepsilon \in E^1$, имеет развилки $a_k(\varepsilon) \in M_{i_k j_k}$, $k = 1, 2$, для которых $a_k(\cdot) \in C^r$, $a_k(0) = a_k^0$, при этом входящая (выходящая) касательная сепаратриса развилки $a_1(\varepsilon)$ пересекает дугу $\eta_1(-1, 1)$ (соотв. $\eta_2(-1, 1)$) в точке $\eta_1(q_{11}(\varepsilon))$ (соотв. $\eta_2(q_{12}(\varepsilon))$), выходящая (входящая) касательная сепаратриса развилки $a_2(\varepsilon)$ пересекает дугу $\eta_1(-1, 1)$ (соотв. $\eta_2(-1, 1)$) в точке $\eta_1(q_{21}(\varepsilon))$ (соотв. $\eta_2(q_{22}(\varepsilon))$), где $q_{kl}(\cdot) \in C^r$, $q_{kl}(0) = 0$ ($k, l = 1, 2$).

Обозначим $q_k(\varepsilon) := q_{k2}(\varepsilon) - q_{k1}(\varepsilon)$ и сформулируем условие

$$\textbf{(У-4)} \quad \det(\partial q_k(0) / \partial \varepsilon_i) \neq 0.$$

Оно не зависит от произвола в выборе отображений η_1 и η_2 . Сделав в окрестности нуля на плоскости параметров замену $\tilde{\varepsilon}_1 = q_1(\varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon}_2 = q_2(\varepsilon)$ и вернувшись к прежним обозначениям параметров, можно считать, что при всех $\varepsilon \in E_* = (-\delta_*, \delta_*)^2$

$$q_k(\varepsilon) = \varepsilon_k \text{ для } k = 1, 2. \quad (1)$$

Из теорем о функциях соответствия по траекториям между дугами без контакта [31, параграф 3] и (1) следует, что для достаточно малых $\sigma_0 > 0$ и $0 < \delta_0 < \min\{\sigma_0, \delta_*\}$ определены отображения

$$\eta_1(q_{11}(\varepsilon) + u) \mapsto \eta_2(q_{21}(\varepsilon) + f_1(u, \varepsilon)), \quad u \in [0, \sigma_0)$$

и

$$\eta_2(q_{21}(\varepsilon) + u) \mapsto \eta_1(q_{11}(\varepsilon) + f_2(u, \varepsilon)), \quad u \in [\varepsilon_2, \sigma_0]$$

по траекториям поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$ такие, что $f_k \in C^r$,

$$(f_k)'_u(u, \varepsilon) > 0, \quad k = 1, 2, \quad f_1(0, \varepsilon) \equiv 0, \quad f_2(\varepsilon_2, \varepsilon) \equiv \varepsilon_1. \quad (2)$$

Число $\lambda := (f_1)'_u(0, 0)(f_2)'_u(0, 0)$ не зависит от произвола в выборе отображений η_1 и η_2 . Сформулируем условие

$$(Y-5) \quad \lambda \neq 1.$$

3. Бифуркации

Теорема. Пусть выполняются условия (Y-1), (Y-2), (Y-3A), (Y-4) и (Y-5). Тогда существуют цилиндрическая окрестность U периодической траектории Γ , ограниченная простыми замкнутыми кривыми γ_- и γ_+ , число $\delta > 0$ и разбиение области $E = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \delta^2\}$ на множества $B_0, B_k, E_k, k = 1, 2, \dots, 6$, где

$$B_0 = \{(0, 0)\}, \quad B_1 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 = \beta_1(\varepsilon_2)\},$$

$$\beta_1 \in C^1((0, \delta), (0, \delta)), \quad \beta_1'(\varepsilon_2) > 0, \quad \beta_1(+0) = 0, \quad \beta_1'(+0) > 0,$$

$$B_2 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 > 0\}, \quad B_3 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 < 0\},$$

$$B_4 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 = \beta_4(\varepsilon_2)\}, \quad \beta_4 \in C^1(-\delta, 0), \quad \beta_4'(\varepsilon_2) > 0, \quad \beta_4(+0) = 0,$$

$$\beta_4'(+0) > 0, \quad B_5 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0\}, \quad B_6 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 > 0\},$$

E_k – связная компонента $E \setminus \bigcup_{k=0}^6 B_k$, в границы которой входят B_k и B_{k+1} ($B_7 := B_1$) такие, что:

1) в случае, когда условие (Y-3) имеет вид (Y-3A), а $\lambda > 1$, в точках γ_- (γ_+) траектории векторных полей X_ε , $\varepsilon \in E$, входят в U (выходят из U), а их фазовые портреты в U имеют вид, изображенный на рис. 2;

2) в случае, когда условие (Y-3) имеет вид (Y-3A), а $\lambda < 1$, в точках γ_- и γ_+ траектории векторных полей X_ε , $\varepsilon \in E$, входят в U , а их фазовые портреты в U имеют вид, изображенный на рис. 3;

3) в случае, когда условие (У-3) имеет вид (У-3Б), а $\lambda > 1$, в точках γ_- (γ_+) траектории векторных полей X_ε , $\varepsilon \in E$, входят в U (выходят из U), а их фазовые портреты в U имеют вид, изображенный на рис. 4.

Случай, когда условие (У-3) имеет вид (У-3Б), а $\lambda < 1$, сводится к случаю 3) переходом к семейству противоположных векторных полей $-X_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Доказательство. Ограничимся случаем 1). В случаях 2) и 3) доказательства аналогичны.

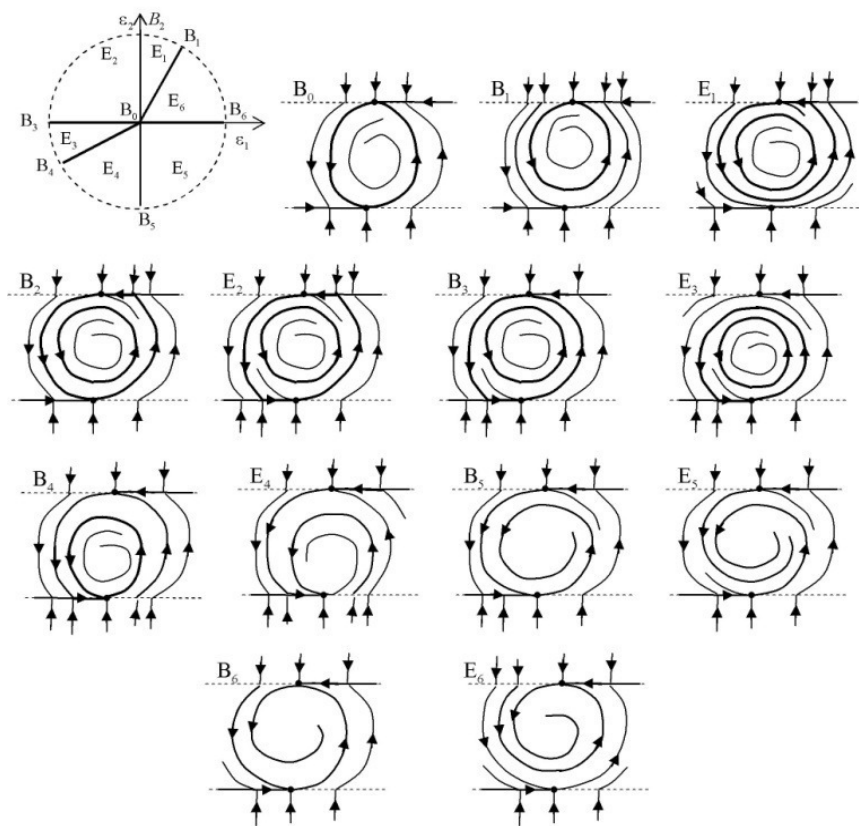


Рис. 2. Бифуркации в случае (У-1), (У-2), (У-3А), (У-4), (У-5) и $\lambda > 1$

Функции f_k ($k=1,2$) можно продолжить до C^r -функций $\bar{f}_k : (-\sigma_0, \sigma_0) \times (-\delta_0, \delta_0)^2 \rightarrow \mathbb{R}$. При достаточно малых $\sigma_1 \in (0, \sigma_0)$ и $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ определена функция

$$\bar{f}(u, \varepsilon) := \bar{f}_2(\bar{f}_1(u, \varepsilon), \varepsilon), \quad (u, \varepsilon) \in (-\sigma_1, \sigma_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2.$$

Для нее $\bar{f}'_u(0,0) = \lambda$. Поскольку $\lambda > 1$, то по теореме о неявной функции получаем, что числа $\sigma_2 \in (0, \sigma_1)$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ можно выбрать так, что $\forall \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$ уравнение $\bar{f}(u, \varepsilon) = u$ имеет относительно $u \in (-\sigma_2, \sigma_2)$ единственное решение $u = \hat{u}(\varepsilon)$, причем $\hat{u}(\cdot) \in C^r$, $\hat{u}(0) = 0$,

$$\bar{f}'_u(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) > 1. \quad (3)$$

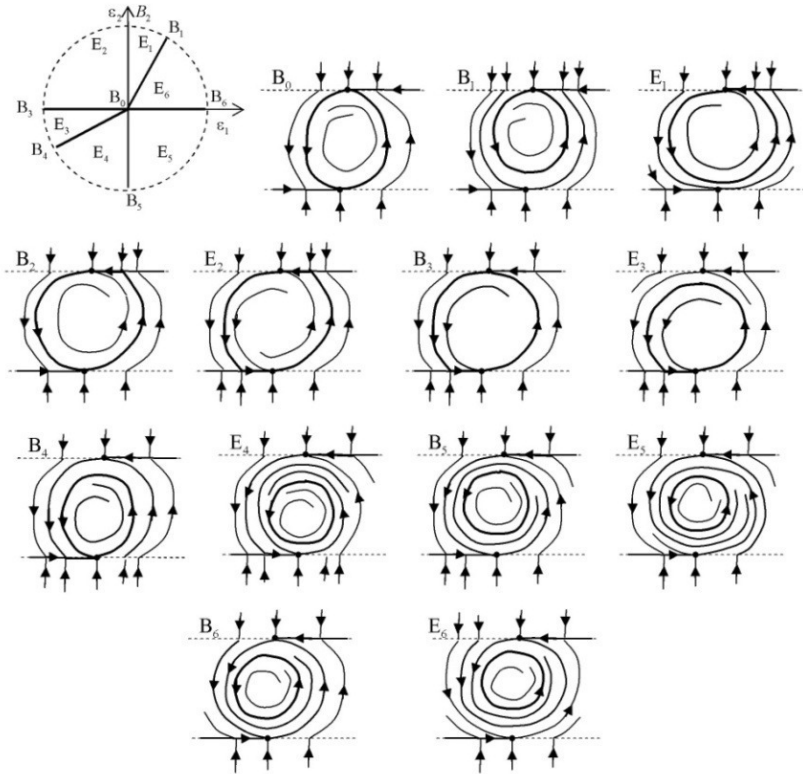


Рис. 3. Бифуркации в случае (Y-1), (Y-2), (Y-3A), (Y-4), (Y-5) и $\lambda < 1$

Функция $f(\cdot, \varepsilon) := f_2(f_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ является функцией последования по траекториям поля X_ε . Поскольку $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$, а $\lambda > 1$, то при достаточно малом $\sigma \in (0, \sigma_2)$ $f(\cdot, 0)$ определена на $[0, \sigma]$ и

$$\forall u \in (0, \sigma] \quad f(u, 0) > u. \quad (4)$$

Тогда при некотором $\delta_3 \in (0, \delta_2)$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)^2 \quad \forall u \in [\sigma/2, \sigma] \quad f_1(u, \varepsilon) > \varepsilon_2, \quad f(u, \varepsilon) > u. \quad (5)$$

Если $\bar{f}(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) = f(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon)$, то через точку $\eta_1(q_{11}(\varepsilon) + \hat{u}(\varepsilon))$ проходит периодическая траектория поля X_ε . Если $\hat{u}(\varepsilon)$ – внутренняя точка области определения функции последования, то из (3) следует, что эта траектория неустойчивая гиперболическая.

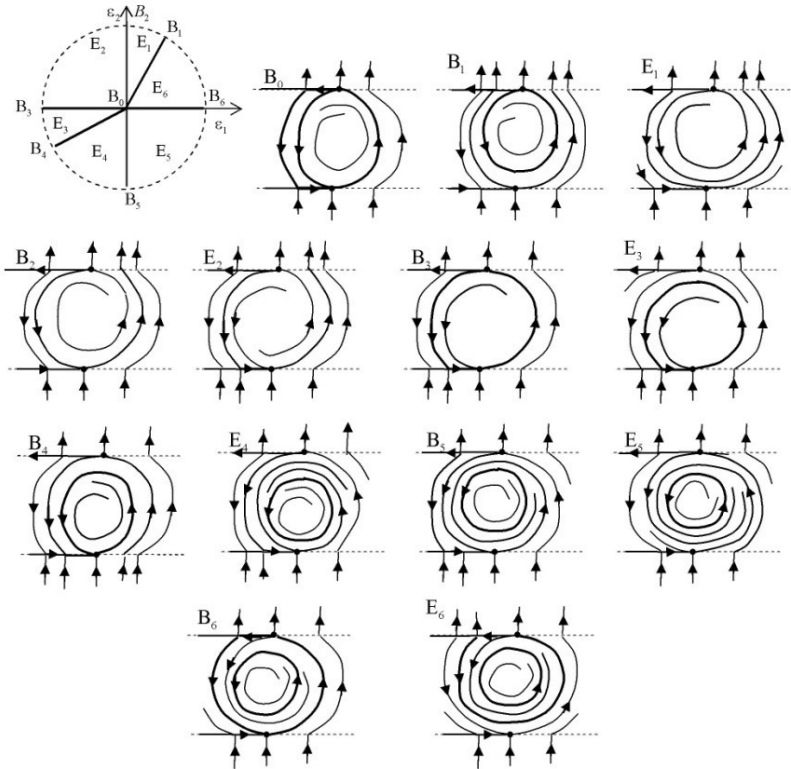


Рис. 4. Бифуркации в случае (Y-1), (Y-2), (Y-3Б), (Y-4), (Y-5) и $\lambda < 1$

Пусть $\Delta(\varepsilon) := \bar{f}_1(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2$. Из (2) получаем $\Delta'_{\varepsilon_1}(0) = (\bar{f}_1)'_u(0, 0) > 0$, $\Delta'_{\varepsilon_2}(0) = -1$. Поэтому найдутся такие числа $0 < \delta_5 \leq \delta_4 \leq \delta_3$, что $\forall \varepsilon_2 \in (-\delta_5, \delta_5)$ уравнение $\Delta(\varepsilon) = 0$ имеет относительно $\varepsilon_1 \in (-\delta_4, \delta_4)$ единственное решение $\varepsilon_1 = \beta_1(\varepsilon_2)$, где

$$\beta_1(\cdot) \in C^r, \quad \beta_1(\varepsilon_2) = (1/(f_1)'_u(0, 0))\varepsilon_2 + o(\varepsilon_2).$$

Следовательно, можно считать $\beta'_1(\varepsilon_2) > 0$, $\beta_1(0) = 0$, $\beta_1(\varepsilon_2) > 0$ при $\varepsilon_2 \in (0, \delta_5)$,

$$\operatorname{sgn}(f_1(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 - \beta_1(\varepsilon_2)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \delta_5)^2. \quad (6)$$

Из (2) следует, что $(\bar{f}_2)'_{\varepsilon_1}(0, 0) = 1$, $(\bar{f}_2)'_{\varepsilon_2}(0, 0) = -(f_2)'_u(0, 0) < 0$. Поэтому можно полагать, что δ_4 и δ_5 выбраны так, что $\forall \varepsilon_2 \in (-\delta_5, \delta_5)$ уравнение $\bar{f}_2(0, \varepsilon) = 0$ имеет относительно $\varepsilon_1 \in (-\delta_4, \delta_4)$ единственное решение $\varepsilon_1 = \beta_4(\varepsilon_2)$, где $\beta_4(\cdot) \in C^r$, $\beta_4(\varepsilon_2) = (f_2)'_u(0, 0)\varepsilon_2 + o(\varepsilon_2)$, и потому $\beta'_4(\varepsilon_2) > 0$, $\beta_4(\varepsilon_2) < 0$ при $\varepsilon_2 \in (-\delta_5, 0)$,

$$\operatorname{sgn} f_2(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 - \beta_4(\varepsilon_2)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta_5, \delta_5) \times (-\delta_5, 0). \quad (7)$$

При достаточно малом $\delta_6 \in (0, \delta_5)$ можно выбрать такие C^1 -вложения $\tau_k^\varepsilon : (-1, 1) \rightarrow M_{i_k j_k}$ ($\varepsilon \in (-\delta_5, \delta_5)^2$, $k = 1, 2$), что $\tau_k^\varepsilon(0) = a_k(\varepsilon)$, а $\tau_k^\varepsilon(0, 1)$ – устойчивая линейная особенность поля X_ε .

Используя леммы из [31, параграф 3] можно построить цилиндрическую окрестность U периодической траектории Γ , ограниченную простыми замкнутыми кривыми γ_- и γ_+ , такую, что при достаточно малом $\delta \in (0, \delta_5)$: 1) траектории полей X_ε , $\varepsilon \in E = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \delta^2\}$, в точках γ_- (γ_+) входят в U (выходят из U), 2) в U нет особых точек, отличных от $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$, 3) $\gamma_\pm$ пересекается с дугой $\eta_1(-1, 1)$ в одной точке $\eta_1(q_{11}(\varepsilon) + u_\pm(\varepsilon))$, где $\sigma/2 < u_\pm(\varepsilon) < \sigma$, 4) γ_- пересекается с $M_{i_k j_k}$ ($k = 1, 2$) в двух точках $\tau_k^0(c_k^\pm)$, $c_k^- < 0 < c_k^+$.

Выберем $\delta \in (0, \delta_6)$ и определим множества B_k , E_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, так, как они описаны в формулировке теоремы.

При $\varepsilon = 0$ из (4) и выбора окрестности U следует, что все отрицательные (положительные) полутраектории траектории, начинающиеся в кольце между Γ_0 и γ_+ , α -предельны к Γ_0 (выходят из U в точках γ_+), начинающиеся в кольце между Γ_0 и γ_- , выходят из U в точках γ_- (совпадают с Γ_0 , начиная с некоторого момента времени).

При $\varepsilon \in B_1$ ввиду (6) $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на $[\varepsilon_1, \sigma]$, $f(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_1$, то есть $\hat{u}(\varepsilon) = \varepsilon_1$ – неподвижная точка $f(\cdot, \varepsilon)$, а соответствующая периодическая траектория $\Gamma(\varepsilon)$ образована совпадающими касательными сепаратрисами развилки $a_2(\varepsilon)$. Вследствие (3) и (5) $f(u, \varepsilon) > u$ для $u \in (\varepsilon_1, \sigma]$, и потому все траектории, начинающиеся в кольце между $\Gamma(\varepsilon)$ и γ_+ , α -предельны к $\Gamma(\varepsilon)$ и выходят из U при возрастании времени в точках γ_+ . Траектории, начинающиеся в кольце между $\Gamma(\varepsilon)$ и γ_- , ведут себя как изображено на рис. 2: положительная полутраектория, начиная с некоторого момента, совпадает с $\Gamma(\varepsilon)$, а отрицательная выходит из U в точках кривой γ_- .

При $\varepsilon \in E_1$ вследствие (6) $f_1(\varepsilon_1, \varepsilon) < \varepsilon_2$. Отсюда и из (5) и (2) получаем, что $f_1(u_L(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon_2$ при некотором $u_L(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, \sigma/2)$. Тогда $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на $[u_L(\varepsilon), \sigma]$ и $f(u_L(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon_1 < u_L(\varepsilon)$. Из этого неравенства, из (5) и (2) следует, что $\hat{u}(\varepsilon) \in (u_L(\varepsilon), \sigma/2)$ и является неподвижной точкой для $f(\cdot, \varepsilon)$. Через точку $\eta(q_{11}(\varepsilon) + \hat{u}(\varepsilon))$ проходит неустойчивая гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_u(\varepsilon)$. Так как значение $f_1(\varepsilon_1, \varepsilon)$ определено и меньше ε_2 , то выходящая сепаратриса развилки $a_2(\varepsilon)$ не пересекается с дугой $\tau_1^\varepsilon(-1, 1)$, содержит дугу $\tau_2^\varepsilon[0, l(\varepsilon)]$ при некотором $l(\varepsilon) > 0$ и образует периодическую траекторию $\Gamma_s(\varepsilon)$. Все отрицательные (положительные) полутраектории, 1) начинающиеся в кольце между $\Gamma_s(\varepsilon)$ и γ_+ , α -предельны к $\Gamma_u(\varepsilon)$ (выходят из U в точках γ_+), 2) начинающиеся в кольце между $\Gamma_u(\varepsilon)$ и $\Gamma_s(\varepsilon)$, α -предельны к $\Gamma_u(\varepsilon)$ (совпадают с $\Gamma_s(\varepsilon)$, начиная с некоторого момента времени), 3) начинающиеся в кольце между γ_- и $\Gamma_s(\varepsilon)$, выходят из U в точках γ_- (совпадают с $\Gamma_s(\varepsilon)$, начиная с некоторого момента времени).

При $\varepsilon \in E_6$ из (6) имеем $f_1(\varepsilon_1, \varepsilon) > \varepsilon_2$. Тогда $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на $[\varepsilon_1, \sigma]$ и $f(\varepsilon_1, \varepsilon) > \varepsilon_1$. Вместе с (5) и (3) получаем что $f(\cdot, \varepsilon)$ не имеет неподвижных точек и $\forall u \in [\varepsilon_1, \sigma] f(u, \varepsilon) > u$. Все отрицательные (положительные) полутраектории, начинающиеся в U , выходят из U в точках γ_- (γ_+).

При $\varepsilon \in B_2 \cup E_2$ $f_1(0, \varepsilon) = 0 < \varepsilon_2$. Отсюда, из (2) и (5) получаем, что $\exists u_L(\varepsilon) \in (0, \sigma/2)$ $f_1(u_L(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon_2$ и $f(u_L(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon_1 < u_L(\varepsilon)$. Из этого неравенства и (5) следует, что $\hat{u}(\varepsilon) \in (u_L(\varepsilon), \sigma)$ и является неподвижной точкой функции последования $f(\cdot, \varepsilon)$. Через точку $\eta(q_{11}(\varepsilon) + \hat{u}(\varepsilon))$ проходит неустойчивая гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_u(\varepsilon)$. При $\varepsilon \in B_2$ ($\varepsilon \in E_2$) выходящая сепаратриса развилки $a_2(\varepsilon)$ пересекается с дугой $\tau_1^\varepsilon(-1, 1)$ в единственной точке $a_1(\varepsilon)$ (содержит дугу $\tau_1^\varepsilon[0, l_1(\varepsilon)]$ при некотором $l_1(\varepsilon) > 0$), содержит дугу $\tau_2^\varepsilon[0, l_2(\varepsilon)]$ при некотором $l_2(\varepsilon) > 0$ и образует периодическую траекторию $\Gamma_s(\varepsilon)$. Асимптотическое поведение траекторий, начинающихся в U и отличных от $\Gamma_u(\varepsilon)$ и $\Gamma_s(\varepsilon)$, такое же, как при $\varepsilon \in E_1$.

При $\varepsilon \in E_3 \cup B_3 \cup E_4 \cup B_4 \cup E_5 \cup B_5 \cup B_6$ $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на отрезке $[0, \sigma]$.

При $\varepsilon \in B_3$ вследствие (2) $f(0, \varepsilon) = \varepsilon_1 < 0$. При $\varepsilon \in E_3$ из (7) также получаем $f(0, \varepsilon) < 0$. Поэтому при $\varepsilon \in B_3 \cup E_3$ $\hat{u}(\varepsilon) \in (0, \sigma)$, и через точку $\eta(q_{11}(\varepsilon) + \hat{u}(\varepsilon))$ проходит периодическая траектория $\Gamma_u(\varepsilon)$. Кроме того, поле X_ε имеет периодическую траекторию $\Gamma_s(\varepsilon)$, проходящую так, как изображено на рис. 2. Асимптотическое поведение траекторий, начинающихся в U и отличных от $\Gamma_u(\varepsilon)$ и $\Gamma_s(\varepsilon)$, такое же, как при $\varepsilon \in E_1$ и $\varepsilon \in B_2 \cup E_2$.

При $\varepsilon \in B_4$ $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на $[0, \sigma]$ и, вследствие (7), $f(0, \varepsilon) = 0$. Тем самым, $\hat{u}(\varepsilon) = 0$ – единственная неподвижная точка $f(\cdot, \varepsilon)$, а соответствующая периодическая траектория $\Gamma(\varepsilon)$ образована совпадающими касательными сепаратрисами развилки $a_1(\varepsilon)$. Асимптоти-

ческое поведение траекторий, начинающихся в U и отличных от $\Gamma(\varepsilon)$, такое же как при $\varepsilon \in B_1$.

При $\varepsilon \in E_4 \cup B_5 \cup E_5$ из (2), (7) и (5), а при $\varepsilon \in B_6$ из неравенства $f(0, \varepsilon) = \varepsilon_1 > 0$, из (2) и (5) следует, что $f(\cdot, \varepsilon)$ не имеет неподвижных точек, а поле X_ε периодических траекторий, пересекающих дугу $\eta_1(q_{11}(\varepsilon), q_{11}(\varepsilon) + u_+(\varepsilon))$. Поведение траекторий, начинающихся в U , изображено на рис. 2: положительные (отрицательные) полутраектории выходят из U в точках γ_+ (γ_-).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин А.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / А.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. М.: Наука, 1976. 496 с.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
3. Piecewise smooth dynamical systems / di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., P. Kowalczyk // Appl. Math. Sci. Vol. 163. London: Springer-Verlag. 2008. 483 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-708-4.
4. Han M. On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems / M. Han, W. Zhang // J. Differential Equations. 2010. Vol. 248. P. 2399–2416.
5. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations / S.J. Hogan, M.E. Homer, M.R. Jeffrey, R. Szalai // J. Nonlinear Sci. 2016. Vol. 26. P. 1161–1173. DOI: 10.1007/s00332-016-9301-1
6. Simpson D.J.W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems // Physics Letters. 2018. Vol. 382, no. 35. P. 2439-2444.
7. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях сшитого фокуса // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-28: Сб. трудов XXVIII Междунар. науч. конференции. 2015. Т. 1. С. 27–31.
8. Ройтенберг В.Ш. О рождении периодической траектории из точки пересечения линий разрыва векторного поля // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2016. № 2. С. 34–38.
9. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях в окрестности точки стыка линий разрыва векторного поля // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 5. С. 30–33.
10. Ройтенберг В.Ш. О рождении странного аттрактора из точки стыка линий разрыва векторного поля // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2016. № 4. С. 53–59.
11. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2 (42). С. 18–31. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-2.

12. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях особой точки типа «сшитый клюв» // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2017. № 4 (211). С. 22–29.
13. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях особой точки типа «полуфокус» кусочно-гладкой динамической системы на плоскости // Математика и математическое моделирование. 2018. № 5. С. 58–71. DOI: 10.24108/mathm.0518.0000140.
14. *Simpson D.J.W.* Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems. World scientific series on nonlinear science, series A. Vol. 69. World Scientific Publ., 2010. 238 p.
15. *Kuznetsov Yu.A.* One-parameter bifurcations in planar Filippov systems / Yu.A. Kuznetsov, S. Rinaldi, A. Gragnani // Intern. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2003. Vol. 13, no. 8. P. 2157–2188. DOI: 10.1142/S0218127403007874.
16. *Guardia M.* Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems/ M. Guardia, T.M. Seara, M.A. Teixeira // J. of Differential Equations. 2011. Vol. 250, no. 4. P. 1967–2023. DOI: 10.1016/j.jde.2010.11.0163.
17. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях петель сепаратрис особых точек на линии разрыва // Ярослав. политехн. ин-т. Ярославль, 1987. Деп. в ВИНТИ 22.04.1987, № 2795-B87.
18. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях кусочно-гладкого векторного поля в окрестности петли сепаратрисы особой точки на линии разрыва // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.5. Ярославль, 2006. С. 49–52.
19. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях кусочно-гладких векторных полей, имеющих петлю сепаратрисы седла, находящегося на линии разрыва // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 6. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2008. С. 46–56.
20. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении предельных циклов из контура, образованного сепаратрисами седла и сшитого седло-узла кусочно-гладкого векторного поля // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2014. Т. 20, № 2. С. 26–30.
21. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях сшитого тройного цикла // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль, 2014. С. 54–67.
22. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодической траектории кусочно-гладкого векторного поля на плоскости, проходящей через точку «стыка» линий разрыва поля // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С. 57-65.
23. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодической траектории с односторонним касанием линии разрыва векторного поля // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 2, ч. 1. С. 37–45.
24. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях предельного цикла, проходящего через точку пересечения линий разрыва векторного поля и касающегося одной из них // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Мате-

- матика. Физика. 2018. Т. 50, № 1. С. 21–34. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-21-34.
25. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях предельных циклов кусочно-гладкой динамической системы // Научно-технический вестник Поволжья. 2018. № 2. С. 17-20. DOI: 10.24153/2079-5920-2018-8-2-17-20.
26. Об одном случае бифуркаций периодической траектории кусочно-гладкого векторного поля // Научно-технический вестник Поволжья. 2018. № 9. С. 12-15.
27. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях петли сепаратрисы двумерной кусочно-гладкой динамической системы // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1 (53). С. 36–50. DOI: 10.21685/2072-3040-2020-1-3.
28. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы шитого седло-узла // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 2. С 159-168. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168
29. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении замкнутых траекторий из двух петель сепаратрис шитого седло-узла, проходящих через развилку // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2023. №3(326). С. 11-20. DOI: 10.53598/2410-3225-2023-3-326-11-20
30. *Ройтенберг В.Ш.* Бифуркации шитого тройного цикла кусочно-гладкой непрерывной динамической системы // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2024. Т. 16, № 1. С. 39-48. DOI: 10.14529/mmph240105.
31. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1966. 568 с.

УДК 517.958:517.984.5

С. А. Титаренко

Санкт-Петербургская торгово-промышленная палата
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: titarenko.sa@gmail.com

ТЕОРЕМЫ ИЗОМЕТРИИ И КЛЕТОЧНОСТИ В ЗАДАЧЕ «УСЛЫШАТЬ ФОРМУ БАРАБАНА»

Для задачи об изоспектральных неизометричных областях предложен новый метод на основе бесконечномерной изометрии пространств функций над ними. Доказано, что такие области m -клеточны и связаны m -значной изометрией, что дает достаточные условия единственности и континуум новых примеров.

Ключевые слова: изоспектральность, задача Каца о барабане, бесконечномерная изометрия, индуцированное отражение, клеточность

S.A. Titarenko

St. Petersburg Chamber of Commerce and Industry
Russia, St. Petersburg, e-mail: titarenko.sa@gmail.com

THEOREMS OF ISOMETRY AND CELLULARITY IN THE TASK "TO HEAR THE SHAPE OF THE DRUM"

For the problem of isospectral non-isometric regions, a new method based on the infinite-dimensional isometry of the spaces of functions over them is proposed. We prove that such regions are m -cellular and are connected by m -valued isometries, which gives sufficient conditions for uniqueness and a continuum of new examples.

Keywords: isospectrality, Katz drum problem, infinite-dimensional isometry, induced reflection, cellularity

Введение. В рассматриваемой задаче требуется найти неизвестную область Ω по заданному спектру лапласиана:

$$-\Delta U_n = E_n U_n, U_n|_{\partial\Omega} = 0; \text{Spec}(\Omega) = \{0 < E_1 < E_2 \leq \dots \rightarrow \infty\}.$$

Например, круги и прямоугольники с точностью до изометрии определяются своим спектром [1]. Эта постановка известна как вопрос Марка Каца (1966) «Можно ли услышать форму барабана?» для колебаний закрепленной по контуру мембраны барабана Ω , где U_n – амплитуды; E_n – частоты колебаний. Сомнения Каца в единственности оправдались: в 90-х гг. найдены примеры пар неизометричных (кратко $\Omega \not\approx \tilde{\Omega}$), но изоспектральных областей Ω и $\tilde{\Omega}$ (спектры равны как счетные множества,

кратко $\Omega \sim \tilde{\Omega}$). Два примера из обзоров [1, 2], взятые из работ [3, 4], изображены на рис. 1 и 2 (контуры Ω и $\tilde{\Omega}$, другие построения – автора). Эти области построены отражениями клетки Φ (разные треугольники) относительно ребер (отрезков) на $\partial\Phi$. В общем случае клеточную природу эффекта $\Omega \sim \tilde{\Omega}, \Omega \neq \tilde{\Omega}$ прояснил метод изоспектрии, впервые представленный автором в препринте Санкт-Петербургского математического общества [5]. После одного из докладов автора в ПОМИ РАН проф. Н.Г. Кузнецов дал анонс этих результатов в [6]. Здесь приводятся доказательства для этой теории, которая в 2-клеточном случае дает осесимметричность как достаточное условие единственности, найденное в [7] принципиально другими методами.

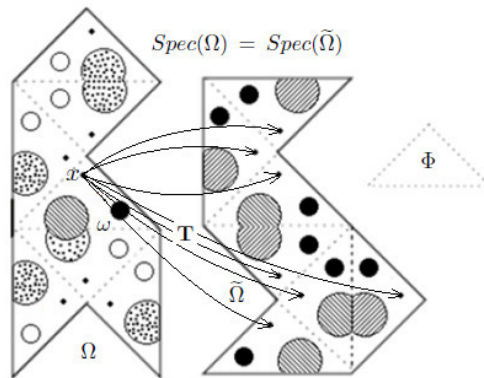


Рис. 1. Пример [3]: стрелки показывают действие многозначной клеточной изометрии T на точку $x \in \Omega$.

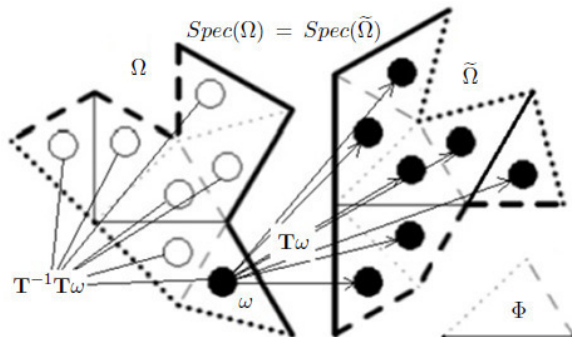


Рис. 2. Пример [4]: стрелки показывают несвязное прямое $T\omega$ и двойное $T^{-1}T\omega$ индуцированное отражение (3) черного круга $\omega \in \Omega$

1. Алгоритм метода изоспектрии

Области $\Omega \sim \tilde{\Omega}$ и их выбираемые подобласти ω считаются равными внутренности своего замыкания: $\omega = \text{int} \bar{\omega}$ (канонически открыты [8]) и имеют кусочно-гладкие границы.

Шаг 1. Спектральную задачу рассматриваем в соболевском пространстве функций W_2^1 (кратко $H(\Omega)$) со скалярным произведением $(f, g)_{H(\Omega)} = (f, g)_{L_2(\Omega)} + \int_{\Omega} (\nabla f, \nabla g) d\Omega$. Хорошо известно [9]: I) $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$; II) $\{U_n/\sqrt{1+E_n}\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $H(\Omega)$, т.к. $(U_n, U_n)_{H(\Omega)} = 1 + E_n$. Лебеговы пространства для любых областей Ω и $\tilde{\Omega}$ изоморфны как гильбертовы посредством бесконечномерной изометрии T , сопоставляющей ортонормированные базисы I) с сохранением коэффициентов разложений функций f :

$$TU_n = \tilde{U}_n, \forall n; Tf = T \sum_{n=1}^{\infty} f_n U_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n TU_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \tilde{U}_n. \quad (1)$$

Лемма 1. Двойная бесконечномерная изометрия пространств функций («изоспектрия») T , сохраняющая и лебегово, и соболевское скалярные произведения, равносильна изоспектральности областей $\Omega \sim \tilde{\Omega}$:

$$\text{Spec}(\Omega) = \text{Spec}(\tilde{\Omega}) \Leftrightarrow TH(\Omega) = H(\tilde{\Omega}) \wedge TL_2(\Omega) = L_2(\tilde{\Omega}). \quad (2)$$

► Так как $\forall n E_n = \tilde{E}_n \Rightarrow \sqrt{1+E_n} = \sqrt{1+\tilde{E}_n}$, то при $\text{Spec}(\Omega) = \text{Spec}(\tilde{\Omega})$ бесконечномерная изометрия T сопоставляет также ортонормированные (согласно II) соболевские базисы и является изоспектрией. Обратно, $TU_n/\sqrt{1+E_n} = \tilde{U}_n/\sqrt{1+\tilde{E}_n}$ для изоспектрии T в силу II) и из (1) следует $E_n = \tilde{E}_n$ для любого n . ◀

Шаг 2. Отождествим подобласти $\omega \subset \Omega$ с парами подпространств $H(\omega) \subset L_2(\omega)$: $\bar{\omega} = \text{supp} H(\omega) = \text{supp} L_2(\omega)$, продолжив все функции нулем на всю Ω . Тогда язык геометрии взаимно заменяется языком пространств функций: $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset \Leftrightarrow \text{ортогональность } L_2(\omega_1) \perp L_2(\omega_2)$, дополнение $\Omega \setminus \omega \Leftrightarrow \text{ортогональное дополнение } L_2(\Omega \setminus \omega)$ и т.д.

Определение 1. Индуцированное отражение T сопоставляет подобласти $\omega \subset \Omega$ внутренность носителя подпространства $TL_2(\omega)$ (либо $TH(\omega)$):

$$\overline{T\omega} = \text{supp} TL_2(\omega) := \overline{\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\alpha}}; \tilde{\alpha} = \bigcup_{\tilde{\delta} \subset \tilde{\Omega}} \{\tilde{\delta} : L_2(\tilde{\delta}) \perp TL_2(\omega)\}, \forall \omega \subset \Omega. \quad (3)$$

Пример: взяв в (3) $\omega = \Omega$, в силу $TL_2(\Omega) = L_2(\tilde{\Omega})$ (2) получаем $\tilde{\alpha} = \emptyset \Rightarrow T\Omega = \tilde{\Omega}$: изоспектральные области $\Omega \sim \tilde{\Omega}$ отражаются друг в друга.

Мотивация термина «отражение»: T есть отражение относительно оси симметрии для 2-клеточных областей. Максимальное «нулевое» множество $\tilde{\alpha} \subset \tilde{\Omega}$ (3) как объединение всех открытых кругов $\tilde{\delta}$ (где равны 0 все функции из $TL_2(\omega)$, ортогонального полному лебегову $L_2(\tilde{\delta})$) по построению канонически открыто, и потому внутренность его замкнутого дополнения $\overline{T\omega}$ канонически открыта [8]. Этого и равенства нулю меры границы $T\omega$ достаточно для построения его соболевского пространства согласно определению (3), которое за счет сохранения двух скалярных произведений оператором T обобщает стандартное определение носителя.

Шаг 3. Подпространство-образ в (3) очевидно содержится в целом пространстве над его носителем: $TL_2(\omega) \subseteq L_2(T\omega)$; $TH(\omega) \subseteq H(T\omega)$. Здесь равенство есть локализация (2) для $\omega \subset \Omega$, $\omega \neq \Omega$:

$$\omega \sim T\omega \Leftrightarrow TH(\omega) = H(T\omega) \Leftrightarrow TL_2(\omega) = L_2(T\omega) \Leftrightarrow \omega = T^{-1}T\omega. \quad (4)$$

Вследствие равноправности (4) лебеговых и соболевских пространств для $\omega \sim T\omega$, далее, избегая двойной записи, употребляются пространства L_2 . Дважды унитарный оператор T (1)-(2) сопоставляет произвольные базисы $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$, но их континуум: новые собственные функции получаются умножением на (-1) и на ортогональные матрицы в кратных подпространствах. Тогда континуум изоспектр $\{T\}$ генерирует согласно (3) семейство индуцированных отражений $\{T\}$, где одно T порождается многими изоспектриями. Например, T и $(-1)T$ (все функции умножаются на (-1) , носители неизменны) дают одно T . Классификация отражений T по (4) для любого $\omega \subset \Omega$, $\omega \neq \Omega$ разветвляет алгоритм на *три случая*:

I. (4) верно для любого $\omega \Leftrightarrow T$ «везде изоспектрально» $\Leftrightarrow \Omega \approx \tilde{\Omega}$ (см. разд. 2, теорема 2).

II. (4) верно не для всех $\omega \Leftrightarrow T$ «частично изоспектрально» $\Rightarrow$ клеточность Ω и $\tilde{\Omega}$ (см. разд. 3, теорема 3).

III. (4) неверно для любого $\omega \Leftrightarrow T$ «везде неизоспектрально». Этот случай сводится к типу I либо II согласованием собственных базисов (см. разд. 4, теорема приведения 4).

Теорема 1. *Отсутствие клеточной структуры либо минимальная 2- или 3-клеточность достаточны для изометрии изоспектральных областей.*

► Изоспектральные $\Omega \sim \tilde{\Omega}$ в силу (2) имеют семейство изоспектр $\{T\}$, индуцирующее семейство отражений $\{T\}$ (3). В нем везде неизоспектральное T (тип III) приводится по теореме 4 к отражениям типа I и/или II. Хотя бы одно везде изоспектральное T (тип I) дает изометрию $\Omega \approx \tilde{\Omega}$ по теореме 2, что заведомо верно при отсутствии клеточной

структуры $\Leftrightarrow$ в $\{T\}$ нет частично изоспектральных T (тип II). Если они есть, Ω и $\tilde{\Omega}$ клеточны по теореме 3: выберем T с минимальным числом клеток m . Если $m = 2$, единственное ребро есть ось симметрии, T – зеркальное отражение и клетки совпадают $\Rightarrow$ изометрия $\Omega \approx \tilde{\Omega}$. Это совпадает с достаточным условием осесимметричности Зельдича [7]. Для $m = 3$ есть только 2 ребра и 2 пары отражений, дающих лишь изометрию $\Omega \approx \tilde{\Omega}$. $\blacktriangleleft$

Для областей, удовлетворяющих теореме 1, спектр есть бесконечный набор их «координат». Примеры $\Omega \approx \tilde{\Omega}, \Omega \sim \tilde{\Omega}$ [3, 4] (см. рис. 1, 2) иллюстрируют теорему клеточности 3: клетка Φ – треугольник, ребер = 3, клеток $m = 7$. Для черного и штрихованного кругов $\omega \subset \Omega$ показаны носители подпространств $L_2(T\omega)$ (3), не заполняемых целиком функциями из $TL_2(\omega)$ в силу (4), т.к. $\omega \not\sim T\omega$. Для построения отражения $T\omega$ пересечения ω с клетками в Ω нужно изометрично перенести в клетки $\tilde{\Omega}$, размножить отражениями и объединить. Компоненты $T\omega$ лишены геометрической связности, но пространства функций над ними переплетены в единое целое многозначной изометрией T . На рис. 1, 2 спектры $T\omega \subset \tilde{\Omega}$ (7 черных кругов либо штриховые 2 «бабочки» с 3 сегментами) очевидно равны спектрам $T^{-1}T\omega \subset \Omega$ (6 белых и 1 черный круг либо залитые точками 2 «бабочки» с 3 сегментами), иллюстрируя формулу (8). Выбирая произвольные $\omega \subset \Omega$, неограниченно генерируем по (8) новые неизометричные $T\omega \sim T^{-1}T\omega$, находя их изоспектральные пересечения, объединения и дополнения (5). Например, на рис. 1, 2 равны спектры многосвязных многоугольников с 7 круглыми дырками, на рис. 1 – с 5 фигурными дырками.

2. Теорема изометрии

Покажем, что

$$\omega_i \sim T\omega_i \Rightarrow \omega_1 \cap \omega_2 \sim T\omega_1 \cap T\omega_2; \Omega \setminus \omega_i \sim \tilde{\Omega} \setminus T\omega_i. \quad (5)$$

► Из равенств $L_2(\omega_1 \cap \omega_2) = L_2(\omega_1) \cap L_2(\omega_2)$ и $TL_2(\omega_i) = L_2(T\omega_i)$ по (4) получаем $TL_2(\omega_1 \cap \omega_2) = L_2(T\omega_1) \cap L_2(T\omega_2) = L_2(T\omega_1 \cap T\omega_2)$. Далее, из $TL_2(\Omega) = L_2(\tilde{\Omega})$ имеем для L_2 над дополнениями $T(L_2(\Omega) \setminus \omega_i) = L_2(\tilde{\Omega} \setminus T\omega_i)$, т.е. дополнения и пересечения изоспектральны. $\blacktriangleleft$

Теорема 2. *Везде изоспектральность отражения областей $\Omega \sim \tilde{\Omega}$ есть необходимое и достаточное условие их изометрии.*

► **Шаг 1. Необходимость.** Пусть $\tilde{\Omega}$ есть копия Ω при изометрии $\tilde{x} = tx$ и T генерируется переносом $\tilde{U}_n(\tilde{x}) = U_n(x)$. Так переносятся все функции. Следовательно, $\forall \omega$ и $T\omega = t\omega$ изометричны и изоспектральны,

и потому везде изоспектральное T (тип I) есть необходимое условие изометрии $\Omega \approx \tilde{\Omega}$.

Шаг 2. Достаточность. Если T везде изоспектрально, то любой круг $\bar{\omega} \subset \Omega$ имеет изоспектральное отражение $T\omega \subset \tilde{\Omega}$, которое вследствие спектральной жесткости круга [1] есть круг такого же радиуса. Пусть β – концентрический с ω круг внятеро меньшего радиуса (гарантия всех построений внутри ω). Из произвольной точки $x \in \beta$ как из центра построим непрерывное семейство концентрических вложенных кругов $\{\omega_b\}$ с радиусами $bR, 0 < b \leq 1, \bar{\beta} \subset \bar{\omega}_1 \subset \bar{\omega}$, где R – удвоенный радиус круга β . Из (5) следует вложенность семейства таких же изоспектральных кругов-образов $\{T\omega_b\} \subset T\omega$. Перекос расположения этих кругов невозможен вследствие (5), поэтому круги концентричны относительно их общего центра $\tilde{x} = \cap_{\forall b} T\omega_b \in T\beta$. Тогда $tx = \tilde{x}$ есть взаимнооднозначное непрерывное отображение точек кругов: $\beta \leftrightarrow tx = T\beta$, ибо разные точки отделяются кругами достаточно малого радиуса. Для любой точки $y \in \beta$ расстояние $r(x, y) = bR$ равно радиусу окружности $\partial\omega_b$. Находя отражение T для кольца $\omega_{b+c} \setminus \overline{\omega_{b-c}}$ при $c \rightarrow 0, c > 0$, имеем $ty \in \partial T\omega_b \Rightarrow r(tx, ty) = r(x, y)$ и $T|_{\beta} = t$ есть изометрия кругов β и $T\beta$. Однако изометричное сужение общего отображения $T|_{\beta}$ не продолжается автоматически как изометрия охватывающих областей Ω и $\tilde{\Omega}$.

Шаг 3. В силу (4) для кругов $\omega_b \sim T\omega_b$ изоспектрия T сопоставляет их собственные функции. Рассмотрим первые: $\forall b Tu_{1b} = \tilde{u}_{1b}$, где $u_{1b}(r) = J_0\left(\frac{j_{01}r}{bR}\right)$; j_{01} – первый нуль функции Бесселя J_0 [9]. Тогда их коэффициенты Фурье $(U_n, u_{1b})_{L_2(\Omega)} = (TU_n, Tu_{1b})_{L_2(\tilde{\Omega})}$ для всех b, n равны согласно (1). Взяв $U_1 > 0$ для Ω (для связных областей U_1 не изменяет знак [9]), считаем $TU_1 = \tilde{U}_1 > 0$ для $\tilde{\Omega}$ (иначе возьмем изоспектрию $(-1)T$, сохранив везде изоспектральность T). Так как $u_{1b}(r) > 0$, положительны двойные интегралы скалярных произведений для коэффициентов Фурье при $n = 1$ и $Tu_{1b} = +J_0(j_{01}\tilde{r}/(bR))$. По теореме о среднем для этих интегралов найдутся такие последовательности точек $x_{nb} \in \omega_b, \tilde{x}_{nb} \in T\omega_b$, что

$$U_n(x_{nb}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{bR} J_0\left(\frac{j_{01}r}{bR}\right) r dr = \tilde{U}_n(\tilde{x}_{nb}) \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{bR} J_0\left(\frac{j_{01}\tilde{r}}{bR}\right) \tilde{r} d\tilde{r},$$

откуда $\forall n U_n(x_{nb}) = \tilde{U}_n(\tilde{x}_{nb})$. При $b \rightarrow 0$ из непрерывности собственных функций следует $U_n(x) = \tilde{U}_n(tx), \forall n, \forall x \in \beta$. При совмещении всех точек $x \in \beta$ и $tx \in T\beta$ тождественно совпадают $U_n|_{\beta}$ и $\tilde{U}_n|_{T\beta}$ и из аналитичности собственных функций [9] следует их равенство вплоть до совпавшей

охватывающей границы $\partial\Omega = \partial\tilde{\Omega}$, выделенной нулевым краевым условием для всех n , так что T есть изометрия областей Ω и $\tilde{\Omega}$. ◀

3. Теорема клеточности

Определение 2. Ядро – это максимальное подмножество $\tilde{\Gamma} \subset T\omega$: $L_2(\tilde{\Gamma}) \subset TL_2(\omega)$, над которым L_2 целиком заполнено функциями из образа $TL_2(\omega)$:

$$\tilde{\Gamma}(T\omega) = \bigcup_{\tilde{\delta} \in T\omega} \{\tilde{\delta}: L_2(\tilde{\delta}) \subset TL_2(\omega)\} \subseteq T\omega. \quad (6)$$

Докажем формулу изоспектральности ядра ($\tilde{\Gamma} = \tilde{\Omega} \Rightarrow \omega = \Omega \Rightarrow$ далее $\tilde{\Gamma} \neq \tilde{\Omega}$):

$$\tilde{\Gamma} \sim T^{-1}\tilde{\Gamma} \Leftrightarrow T^{-1}L_2(\tilde{\Gamma}) = L_2(T^{-1}\tilde{\Gamma}). \quad (7)$$

► Если $\tilde{\Gamma} = T\omega$: то (6) $\Rightarrow L_2(\tilde{\Gamma}) = L_2(T\omega) = TL_2(\omega) \Rightarrow T\omega \sim \omega$ согласно (4) и $\omega = T^{-1}\tilde{\Gamma}$. Если $\tilde{\Gamma} \neq T\omega$, то сужения $\tilde{U}_n|_{\tilde{\epsilon}} \notin TL_2(\omega)$, $\forall n$ при $\tilde{\epsilon} \cap \tilde{\Gamma} = \emptyset$ – иначе сужение базиса (косоугольного!) $\{\tilde{U}_k|_{\tilde{\epsilon}}\}_{k=1}^{\infty}$, по которому разлагаются $\tilde{U}_n|_{\tilde{\epsilon}}$, оказались бы в $TL_2(\omega)$ и порождали бы $L_2(\epsilon) \subset TL_2(\omega)$, что противоречит максимальному свойству ядра $\tilde{\Gamma}$. Обозначив: $g_n = T^{-1}\tilde{U}_n|_{\tilde{\Gamma}}$, $\tilde{\gamma}_n = \text{supp } g_n \subset \tilde{\Gamma}$, $\Gamma = T^{-1}\tilde{\Gamma}$, запишем разложения для сужений $g_n|_{\epsilon} = u + v$, $\forall \epsilon \subset \gamma_n$, $u \in T^{-1}L_2(\tilde{\Gamma})$, а v принадлежит ортогональному дополнению до $TL_2(\omega)$. Эти сужения доставляют минимум квадрату нормы их разности с g_n . Следовательно, $Tv = 0$: носители Tv , ортогональных всему $L_2(\tilde{\Gamma})$, лежат вне $\tilde{\Gamma}$, увеличивая квадрат нормы разности с $Tg_n = \tilde{U}_n|_{\tilde{\Gamma}} \in L_2(\tilde{\Gamma})$. Из $Tg_n|_{\epsilon} = Tu \in L_2(\tilde{\Gamma})$, $\forall \epsilon \subset \gamma_n \Rightarrow T\gamma_n = \tilde{\Gamma}$, откуда следует $T\Gamma = \tilde{\Gamma}$ в силу $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ и тогда (4) $\Rightarrow$ (7). ◀

Если $T\omega \neq \tilde{\Omega}$, то $L_2(\tilde{\Omega} \setminus T\omega)$ в силу $TL_2(\Omega) = L_2(\tilde{\Omega})$ (2) целиком заполняется функциями из $TL_2(\Omega \setminus \omega) \Rightarrow$ ядро $\tilde{\Gamma}(T(\Omega \setminus \omega)) = \tilde{\Omega} \setminus \overline{T\omega}$. Пространство L_2 над ним в силу (7) переводится T^{-1} в L_2 над его обратным образом $T^{-1}\tilde{\Gamma}$ и (5) дает принципиальную формулу изоспектральности:

$$\text{Spec}(T\omega) = \text{Spec}(T^{-1}T\omega) \Leftrightarrow T^{-1}L_2(T\omega) = L_2(T^{-1}T\omega). \quad (8)$$

Лемма 2. Типы T по монотонности (см. разд. 1, Шаг 3, $\Omega \neq \omega \subset \Omega$):

I. $\omega \sim T\omega, \forall \omega \Leftrightarrow T$ везде изоспектрально $\Leftrightarrow T$ строго монотонно на всей области Ω : $\forall \omega_1 \neq \omega_2: \omega_1 \subset \omega_2 \Rightarrow T\omega_2 \neq T\omega_1 \subset T\omega_2$.

III. $\omega \sim T\omega, \forall \omega \Leftrightarrow T$ везде неизоспектрально $\Leftrightarrow T$ тривиально монотонно: $T\omega = \tilde{\Omega}, \forall \omega$.

► Тип I: везде изоспектральное T очевидно строго монотонно на Ω . Обратно, если T строго монотонно, то Ω – единственный прообраз для

$\tilde{\Omega} \Rightarrow$ все $L_2(T\omega)$ целиком заполнены функциями из $TL_2(\omega) \Rightarrow \omega \sim T\omega, \forall \omega \subset \Omega$. Тип III: $T\omega = \tilde{\Omega}, \forall \omega \Rightarrow \omega \not\sim T\omega$, т.к. локальные $\omega \not\sim \tilde{\Omega}$. Обратно, из везде неизоспектральности T следует отсутствие локализованных $T\omega \neq \tilde{\Omega}$: они по (8) давали бы локальные $T\omega \sim T^{-1}T\omega$, и потому T типа III тривиально монотонно. $\blacktriangleleft$

Частично изоспектральное T (тип II) по лемме 2 не является ни строго монотонным, ни тривиально монотонным на Ω – для него остается строгая монотонность на «кусках» Ω – зародышах будущих клеток.

Определение 3. Клетка – связная подобласть $\Phi \subset \Omega: \text{Spec}(\Phi) \subset \text{Spec}(\Omega)$. Собственный базис $\{u_k(\Phi)\}_{k=1}^\infty$ есть сужение подмножества $\{U_{n_k}(\Omega)\}_{k=1}^\infty$:

$$\forall u_k = U_{n_k}|_\Phi, U_{n_k}|_{\partial\Phi} = 0 \Rightarrow e_k = E_{n_k}, e_k \in \text{Spec}(\Phi), E_{n_k} \in \text{Spec}(\Omega). \quad (9)$$

Утверждение (9) связано только со спектром и с инвариантностью лапласиана при отражениях [9]: собственные функции клетки Φ продолжаются до собственных функций всей клеточной области нечетными отражениями относительно отрезков на $\partial\Phi$ – см. примеры таких областей на рис. 1, 2.

Теорема 3. Из частичной изоспектральности отражения областей $\Omega \sim \tilde{\Omega}$ следует их клеточность и многозначная изометрия.

► **Шаг 1.** T этого типа II не является строго монотонным на Ω , следовательно, существует внутренняя подобласть $\overline{\omega_1} \subset \Omega: T\omega_1 = \tilde{\Omega}$. Если отражение T не является строго монотонным на ω_1 , то существует внутренняя подобласть $\overline{\omega_2} \subset \omega_1: T\omega_2 = T\omega_1 = \tilde{\Omega}$ и т.д. При этом снаружи $\omega_n, \forall n$ нет подобластей $\alpha \subset \Omega \setminus \omega_n$ с изоспектральным образом $\alpha \sim T\alpha$, так как целиком заполненное пространство $L_2(T\alpha) = TL_2(\alpha)$ препятствовало бы равенству $T\omega_n = \tilde{\Omega}$. Для некоторого $N < \infty$ существует круг $\bar{\omega} \subset \omega_N$, на котором T строго монотонно – иначе в пересечении стягивающихся замкнутых множеств $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{\omega_n}$, имеющем меру нуль, нет подобластей с изоспектральным образом, и T по лемме 2 везде неизоспектрально, что противоречит его частичной изоспектральности. В круге строгой монотонности ω нет подобластей $\alpha \sim T\alpha$ – иначе по теореме 2 они изометричны и T везде строго монотонно.

Шаг 2. Введем связную область $\Phi_1 \subset \omega_1 \subset \Omega$ как объединение всех содержащих ω связных подобластей строгой монотонности T . Построив ϵ -пояс $B_\epsilon = \bigcup_{x \in \partial\Phi_1} b_\epsilon(x)$; $b_\epsilon(x)$ = круг с центром x радиуса ϵ , выбросим пояс из Φ_1 : $\Phi_{1\epsilon} = \Phi_1 \setminus \overline{B_\epsilon}$. Обозначим $\tilde{\Omega}_\epsilon = T\Phi_{1\epsilon}, \Omega_\epsilon = T^{-1}T\Phi_{1\epsilon}$ несвязное прямое и двойное отражение с $\tilde{m}$ и m компонентами связности $\tilde{\Phi}_{j\epsilon}, j = \overline{1, \tilde{m}}$ и $\Phi_{i\epsilon}, i = \overline{1, m}$ соответственно. Имеем $\tilde{\Omega}_\epsilon \sim \Omega_\epsilon$ по формуле

изоспектральности (8), и в силу $L_2(\Omega_\epsilon) = \bigoplus_{i=1}^m L_2(\Phi_{i\epsilon})$ (аналогично для H) в ортогональном дополнении $TL_2(\Phi_{i\epsilon}), i \neq 1$ до всего $TL_2(\Omega_\epsilon) = L_2(T\Phi_{1\epsilon}) = L_2(\tilde{\Omega}_\epsilon)$ (4) всегда содержится $TL_2(\Phi_{1\epsilon})$. Поэтому все отражения одинаковы: $T\Phi_{i\epsilon} = \tilde{\Omega}_\epsilon$. При убывании $\epsilon \rightarrow +0$ вместе со строго монотонным расширением $\Phi_{1\epsilon}$ возникает в силу изоспектральности пересечений и дополнений (5) строго монотонное расширение всех $\Phi_{i\epsilon}, i \neq 1$. Тем самым, все Φ_i являются максимальными областями строгой монотонности. Эти области дают разбиение $\Omega' = \bigcup_{i=1}^m \Phi_i; \Phi_i \cap \Phi_j = \emptyset, i \neq j; \bar{\Omega}' = \bar{\Omega}$, причем ядра $\tilde{f}(T\Phi_i) = \emptyset \Leftrightarrow TL_2(\Phi_i)$ не содержат целиком L_2 ни над одной окрестностью в $\tilde{\Omega}$.

Шаг 3. $L_2(\Omega) = L_2(\Omega') = \bigoplus_{i=1}^m L_2(\Phi_i); H(\Omega) \neq H(\Omega') = \bigoplus_{i=1}^m H(\Phi_i)$: здесь нет соболевских функций с ненулевыми следами на границах с соседними Φ_i . Пусть L_{ik} – это $L_2(\Omega)$ без 1-мерного подпространства $\{u_{ik}\}$ для собственной функции u_{ik} с номером k из ортонормированного базиса компоненты Φ_i . Образ TL_{ik} не содержит целого L_2 ни над одной окрестностью $\tilde{\omega} \subset \tilde{\Omega}; T(\Omega \setminus \bar{\Phi}_i) = \tilde{\Omega}$ и в $\Omega \setminus \bar{\Phi}_i$ нет подобластей $\delta \sim T\delta \Leftrightarrow TL_2(\delta) = L_2(T\delta)$. Поэтому добавление $\{u_{ik}\}$ дает целое пространство $T(L_{ik} \oplus \{u_{ik}\}) = TL_2(\Omega) = L_2(\tilde{\Omega})$ сразу для всех $\tilde{\omega} \subset \tilde{\Omega}$, откуда $\text{supp}Tu_{ik}$ равно замыканию $\tilde{\Omega}$. Аналогично, $\text{supp}T^{-1}\tilde{u}_{jk} = \tilde{\Omega}, j = 1, \dots, \tilde{m}; \forall k$.

Шаг 4. $H(\tilde{\Omega}') \subseteq TH(\Omega')$ и аналогичное включение для T^{-1} дают $TH(\Omega') = H(\tilde{\Omega}')$. Вместе с $TL_2(\Omega) = L_2(\tilde{\Omega})$ это означает (2): несвязные разбиения изоспектральны $\Omega' \sim \tilde{\Omega}'$, T – их изоспектрия, Tu_{ik} – собственные функции $\tilde{m}$ -компонентной $\tilde{\Omega}'$ с теми же собственными значениями e_{ik} . $\Omega' \sim \tilde{\Omega}'$ и $\text{supp}Tu_{ik} = \tilde{\Omega}$ дают сужение Tu_{ik} на любую компоненту $\tilde{\Phi}_j$ пропорционально ее нормированной собственной функции $\tilde{u}_{jk}$:

$$(Tu_{ik})|_{\tilde{\Phi}_j} = t_{ij}\tilde{u}_{jk}; t_{ij} \neq 0, \tilde{e}_{jk} = e_{ik}. \quad (10)$$

Число t_{ij} не зависит от номера k : для $Tu_{ik} \in H(\tilde{\Omega})$ сохраняются и лебегова, и соболевская нормы. Аналогично для T^{-1} попарно изоспектральны все $\Phi_i \sim \tilde{\Phi}_j$. Из (10) следует, что сужение $T_{ij}(f) = (Tf)|_{\tilde{\Phi}_j}/t_{ij}, f \in L_2(\Phi_i)$ для пар этих компонент есть двойная бесконечномерная изометрия, сохраняющая для $f \in H(\Phi_i) \subset L_2(\Phi_i)$ обе нормы и индуцирующая отражение T_{ij} . Множитель $1/t_{ij}$ не изменяет носителей функций, и из $T_{ij}\omega = \tilde{\Phi}_j$ следует $\omega = \Phi_i$. Тогда по лемме $2T_{ij}$ строго монотонно $\Leftrightarrow$ везде изоспектрально, а компоненты Φ_i и $\tilde{\Phi}_j$ изометричны по теореме 2 для всех i и j . Отображение $T\Phi_i|_{\tilde{\Phi}_j}$ есть их попарная изометрия (но не их изоспектрия $T_{ij}!$). Отсюда $m = \tilde{m}$, т.к.

площади Ω и $\tilde{\Omega}$ равны в силу совпадения асимптотик их одинаковых спектров [8], и эти области состоят из m одинаковых клеток (9) и T есть их многозначная клеточная изометрия.

Замечание. В общем случае в семействе отражений $\{T\}$ может быть счетное множество частично изоспектральных T , отвечающих множеству клеточных структур с разным числом клеток. Например, на рис. 1 клетка Φ самоподобно делится пополам высотой из прямого угла и число таких клеток $m = 7 \times 2^k, k = 1, 2, \dots$ – число делений.

4. Теорема приведения

Теорема 4. *Везде неизоспектральное отражение приводится либо к везде, либо к частично изоспектральному отражению.*

Полное доказательство этой теоремы выходит за рамки данной работы – здесь на важном примере рассмотрим его основные идеи.

Пример. Тожественная изометрия $\tilde{\Omega} = \Omega, \tilde{U}_n \equiv U_n, \forall n$ дает везде изоспектральное отражение T (теорема 2). Для следа $U_n(\omega)$ на подобласти $\omega \subset \Omega$ выпишем ряд Фурье его образа:

$$TU_n(\omega) = w_1 \tilde{U}_1 + \dots + w_n \tilde{U}_n + \dots = w_1 U_1 + \dots + w_n U_n + \dots;$$

$$w_n = (U_n(\omega), U_n)_{L_2(\Omega)} = \|U_n(\omega)\|^2 > 0.$$

В новой изоспектрии T' заменим U_n на $(-1)U_n$ и выразим новый образ n -следа через прежний: $T'U_n(\omega) = w_1 U_1 + \dots + w_n (-1)U_n + \dots = U_n(\omega) - 2w_n U_n$. Здесь правая часть не обращается в нуль ни в одной окрестности из Ω , т.к. $\text{supp} U_n = \bar{\Omega} \Rightarrow \text{supp} T'U_n(\omega) = \bar{\Omega} = \tilde{\bar{\Omega}}, \forall \omega \subset \Omega$ (кроме подобластей, где $w_n = 1/2$). Тогда по определению $1T'\omega = \tilde{\bar{\Omega}}, \forall \omega \subset \Omega$, и потому новое отражение T' везде неизоспектрально согласно лемме 2, но подпространство функций, ортогональных U_n , т.е. без n -го члена в их разложениях, остается инвариантным, например, следы $U_k(\alpha), k \neq n$, на тех подобластях $\alpha \subset \Omega$, где они ортогональны U_n , сохраняются локальными.

Данный пример подчеркивает причину везде неизоспектральности – рассогласование глобальных базисов собственных функций. В общем случае для теоремы 4 доказывается существование инвариантного локализуемого подпространства, в котором для некоторой подобласти ω лежит локализуемый образ следа $\text{supp} TU_n(\omega) \neq \tilde{\bar{\Omega}}$. Затем конструктивно строится новый базис, порождающий новую изоспектрию T' и новое отражение T' , в котором локализуется $T'\omega \neq \tilde{\bar{\Omega}}$. Тогда по формуле (8) получаем пару локальных изоспектральных множеств $T'\omega \sim T'^{-1}T'\omega$ и новое T' по лемме 2 уже не является везде неизоспектральным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Giraud O.* Hearing shapes of drums – mathematical and physical aspects of isospectrality / O. Giraud, K. Shas // *Reviews of Modern Physics*, 2010. Vol. 82. P. 2213–2255.
2. *Титаренко С.А.* Теорема Сунады и последние продвижения в обратной задаче спектральной геометрии // *Алгебра и анализ*, 1996. Т. 8. С. 14–38.
3. *Gordon C.* Constructions of Sound-Alike Manifolds // Department of Mathematics, Dartmouth College, 2012. P. 1–69.
4. *Buser P.* Some planar isospectral domains / P. Buser, J. Conway, K.D. Semmler // *Int. Math. Res. Notices*. 1994. Vol. 9. P. 391–400.
5. *Титаренко С.А.* Можно услышать форму почти любого барабана. Санкт-Петербург, 2020. 11 с. (Препринт / Санкт-Петербургское математическое общество; № 2020-04).
6. *Kuznetsov N.G.* On Delusive Nodal Sets of Free Oscillations // *EMS Newsletter*, 2015. Vol. 96. P. 34–40.
7. *Zelditch S.* Inverse spectral problem for analytic domains - II: $\mathbb{Z}_2$ -symmetric domains // *Annals of Mathematics*. 2009. Vol. 170. P. 205–269.
8. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
9. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 51:378

М. А. Башкин, А. А. Монахова, В. С. Силин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

О МОТИВАЦИИ ИНЖЕНЕРОВ-ПРОГРАММИСТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В статье рассматривается вопрос мотивации студентов при освоении ими естественнонаучных дисциплин на примере изучения операций над матрицами. Тем самым продолжено рассмотрение проблематики совершенствования обучения математике в техническом вузе, начатое в работах [1] и [2]. Новизна подхода заключается в использовании передовых достижений науки на занятиях со студентами первых курсов IT-направлений. Под передовыми достижениями понимаются элементы алгебры квантовых вычислений, не требующие более глубоких знаний по математике, чем знание школьного курса и азов матричной алгебры.

Ключевые слова: мотивация студентов, линейная алгебра, квантовые вычисления

M. A. Bashkin, A. A. Monakhova, V. S. Silin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

ABOUT MOTIVATION OF SOFTWARE ENGINEERS WHEN STUDYNG HIGHER MATHEMATICS

The article examines the issue of students motivation when they study natural sciences. An example of studying is operations on matrices. The authors continues to consider the problems of improving the teaching of mathematics at a technical university, which began in [1] and [2]. The novelty of the approach lies in the use of advanced scientific achievements in classes with first-year IT students. Advanced achievements are understood as elements of the algebra of quantum computing that do not require deeper knowledge of mathematics than knowledge of a school course and the basics of matrix algebra.

Keywords: student motivation, linear algebra, quantum computing

Одной из основных проблем, которые возникают при изучении курса математики в техническом вузе, является проблема мотивации студентов к изучению непрофильных дисциплин. В этой работе мы рассмотрим одну из «находок», которую можно использовать на занятиях по линейной алгебре у инженеров информационных направлений подготовки для повышения интереса к изучаемой дисциплине.

Известной проблемой в IT-сфере является создание квантового компьютера. Сейчас можно много услышать о квантовых компьютерах по радио, телевидению, прочитав в интернете. При этом оказывается, что линейная алгебра – это язык квантовых вычислений. Она широко используется для описания состояний кубитов, квантовых операций и прогнозирования того, что выполнит квантовый компьютер в ответ на последовательность инструкций (программу). Кубиты, в отличие от классических двузначных битов, могут быть не только в определенном состоянии (либо 0, либо 1), но и в состоянии суперпозиции (когда кубит является и нулем, и единицей одновременно). В этом случае кубит находится во всех возможных состояниях одновременно, но с разной вероятностью, которые в сумме дают 1. Состояние одиночного кубита можно представить двумерным вектором-столбцом единичной нормы. Этот вектор, называемый вектором квантового состояния (вектором-кубитом), содержит всю информацию, необходимую для описания однокубитной квантовой системы, точно так же, как один бит содержит всю информацию, необходимую для описания состояния двоичной переменной.

Итак, любой двумерный вектор-столбец с действительными или комплексными числами и нормой 1 представляет возможное квантовое состояние кубита. Таким образом, вектор $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ представляет состояние кубита, если α и β являются комплексными числами, удовлетворяющими условию $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Пусть классическим битам соответствуют состояния $0 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Эти векторы образуют базис для векторного пространства, описывающего состояние кубита. Он называется *вычислительной базой*. Любой вектор квантового состояния может быть представлен как сумма этих базисных векторов с комплексными коэффициентами: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Только два состояния квантовых кубитов соответствуют состояниям классических битов. Существует еще множество других квантовых состояний

кубитов. Координаты вектора $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ отражают вероятность коллапса кубита

до одного из классических состояний, где $|\alpha|^2$ – это вероятность коллапса до 0, а $|\beta|^2$ – до 1.

Первый тип задач, которые можно рассмотреть на занятии, – это задачи на выбор векторов из списка, которые представляют допустимые квантовые состояния. Таким образом, закрепляются первоначальные представления о рассматриваемом множестве векторов-кубитов.

Второй тип задач – это задачи на нахождение векторов-кубитов, обладающих заданным свойством:

- а) с единичной вероятностью коллапса до 0;
- б) с единичной вероятностью коллапса до 1;
- в) соответствующие запутанным состояниям. В последнем случае

можно упростить задачу, определив возможные значения для координат,

например, множеством $\left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} ; \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right\}$.

Определим теперь некоторые операции над кубитами. Для этого рассмотрим унитарные матрицы порядка 2×2 , на которые умножаются соответствующие векторы состояний входных кубитов. Квантовые операции, в отличие от многих классических, всегда являются обратимыми. Поэтому обратная матрица к матрице операции должна равняться ее же эрмитово-сопряженной матрице. При выполнении квантовой операции с кубитом оба вектора, представляющие его, умножаются, а полученный результат отражает новое состояние кубита после операции.

Третий тип задач – это исследование действий матриц простейших однокубитных операций на векторы базы и интерпретацию полученного результата. Например, отрицание (операция Паули X), операция Паули Y , операция Паули Z , преобразование Адамара H .

Четвертый тип – это доказательство свойств операций. Например, доказательство того, что преобразование Адамара является обратным к себе.

Пятый тип задач – это проверка тождеств $HXH = Z$, $HZH = X$, $HYH = -Y$.

Рассмотренный подход к изучению матричной алгебры интересен тем, что приходится работать не только с векторами (матрицами), но и с комплексными числами. Практико-ориентированных задач на матрицы

над полем комплексных чисел в учебниках по алгебре для технических вузов нет (см. в [3] и даже в более современном [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин М.А.* Об основных понятиях курса высшей математики / М.А. Башкин // Наука. Образование. Общество: Материалы Всероссийской научно-технической конференции, Рыбинск, 12–13 октября 2017 года. Том 2. Рыбинск: Рыбинский государственный авиационный технический университет им. П.А. Соловьева, 2017. С. 109–112.
2. *Башкин М.А.* Образовательные технологии в самостоятельной работе студентов и курсантов / М.А. Башкин, Н.И. Иванова // Актуальные вопросы современной науки и образования: сборник научных статей по материалам XX международной научно-практической конференции, Киров, 19–23 апреля 2021 года. Москва: Московский финансово-юридический университет МФЮА, 2021. С. 802–808.
3. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для вузов / В.А. Болгов, Б.П. Демидович, А.В. Ефимов [и др.]; под ред. В.А. Ефимова и Б.П. Демидовича. 2-е изд. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит.-ры, 1986. 464 с.
4. Линейная алгебра: учебник для вузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко; ред. В.С. Зарубин, А.П. Крищенко. 5-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. 335 с.

УДК 51:378

Л. В. Березина, А. В. Васильева, А. И. Бурцев

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: berezina_lv@pisem.net, vasileva@rsatu.ru,
byrzev@rsatu.ru

ОБ ОПЫТЕ ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИЯ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ В РГАТУ ИМЕНИ П.А. СОЛОВЬЕВА

Авторы статьи делятся опытом по некоторым аспектам организации и проведения Всероссийской студенческой математической олимпиады. Олимпиаду проводит Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А. Соловьева", г. Рыбинск. Анализ данных выполнен за период с 2021 по 2024 года.

Ключевые слова: опыт проведения олимпиад, конкурсные задания, научное творчество студентов, математическая подготовка

L. V. Berezina, A. V. Vasilyeva, A. I. Burtsev

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: berezina_lv@pisem.net, vasileva@rsatu.ru,
byrzev@rsatu.ru

ABOUT THE EXPERIENCE OF ORGANIZING AND HOLDING THE ALL-RUSSIAN STUDENT MATHEMATICAL OLYMPIAD AT THE P.A. SOLOVYOV RUSSIAN STATE TECHNICAL UNIVERSITY

The authors of the article share their experience on some aspects of organizing and conducting the All-Russian Student Mathematical Olympiad. The Olympiad is organized by the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University", Rybinsk. The data analysis was performed for the period from 2021 to 2024.

Keywords: the experience of holding Olympiads, competitive tasks, scientific creativity of students, mathematical training.

Студенческие математические олимпиады различного уровня РГАТУ имени П.А. Соловьева проводит с 2012 года [1–4]. В олимпиаде принимают участие курсанты высших военных училищ и студенты всех специальностей и направлений подготовки. В 2022 году было принято решение ограничить статус участников первым курсом. Соревнования проводятся по четырем номинациям: физико-математические, технические и экономические специальности, курсанты высших военных училищ. География вузов, принимающих участие в олимпиаде, достаточно широка: Москва и Московская область, Санкт-Петербург, Тверь, Воронеж, Кострома, Ярославль, Рязань, Новосибирск, Смоленск.

Отметим, что Всероссийская студенческая математическая олимпиада для студентов второго и старших курсов проводится Ярославским государственным техническим университетом [5–6].

С целью подведения итогов олимпиад, оценки качества подготовки, количества участников, оценки решаемости задач были выполнены некоторые статистические расчеты. Данные для статистического анализа выбирались за последние четыре года, в течение которых олимпиада проводилась для студентов первого курса.

На диаграмме рис. 1 показано изменение количества участников олимпиады за рассматриваемые четыре года. Из диаграммы видно, что число молодых людей, принимающих участие в данном интеллектуальном состязании, неуклонно растет.

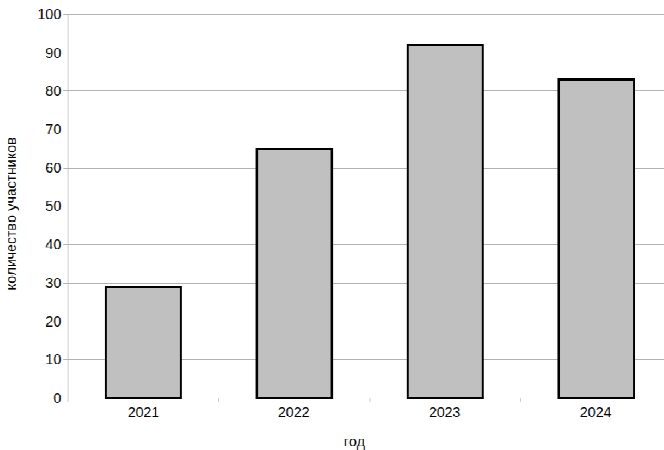


Рис. 1. Диаграмма изменения количества участников Всероссийской студенческой математической олимпиады в период 2021–2024 г.

При организации олимпиады предусмотрено подведение итогов отдельно для следующих направлений обучения: курсанты высших военных учебных заведений, студенты физико-математических, технических и экономических специальностей. На диаграммах (рис. 2) представлено распределение состава участников (в процентном соотношении) по заявленным номинациям.

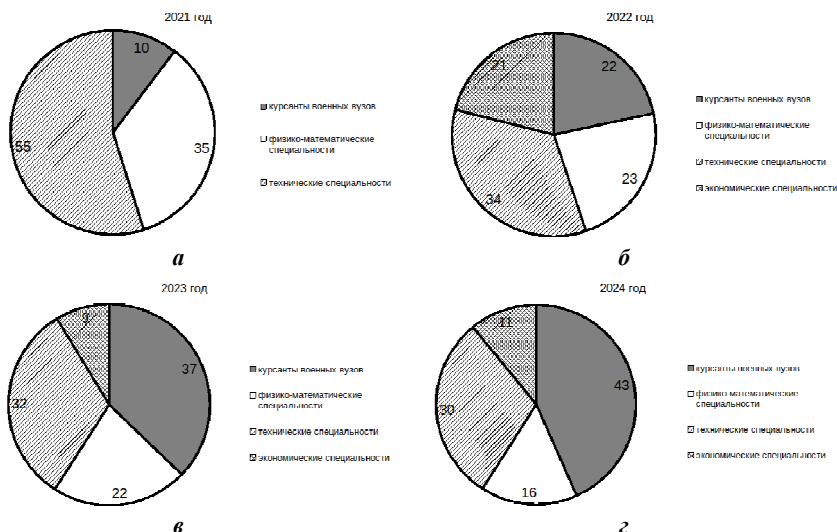


Рис. 2. Изменение состава участников Всероссийской студенческой математической олимпиады по номинациям:
 а – 2021 год; б – 2022 год; в – 2023 год; г – 2024 год

Анализ представленных на рис. 2 данных показывает, что в 2021 году более половину участников олимпиады представляли студенты технических специальностей. В последующие годы процент студентов технического направления подготовки оставался на уровне 30–34%. За рассматриваемый период число участников военных специальностей увеличивалось с 10% в 2021 году до 43% в 2024 году. Обратная ситуация наблюдается со студентами физико-математических специальностей, их количество уменьшилось с 35% в 2021 году до 16% в 2024 году. Участники экономических направлений обучения в 2021 году не принимали участие в олимпиаде, в 2022 году их был 21% от общего количества участников, далее это количество остается на уровне 9–11%.

Далее рассмотрены результаты, полученные участниками при решении олимпиадных задач. На следующем графике (рис. 3) представлены

средние баллы по каждой из заявленных номинаций. В 2022 году средний балл почти по всем номинациям был ниже, чем в остальные года. В 2023 г. наблюдаются наибольшие значения средних баллов у участников всех направлений подготовки.

Традиционно лучшие результаты показывают студенты физико-математических специальностей, немного им уступают участники технических направлений подготовки. Курсанты высших военных учебных заведений в 2023 году обогнали экономистов, а в 2024 году и студентов технических направлений.

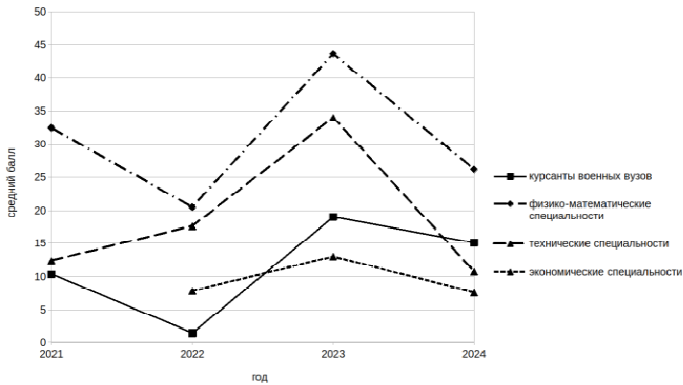


Рис. 3. Средний балл участников Всероссийской студенческой математической олимпиады по номинациям

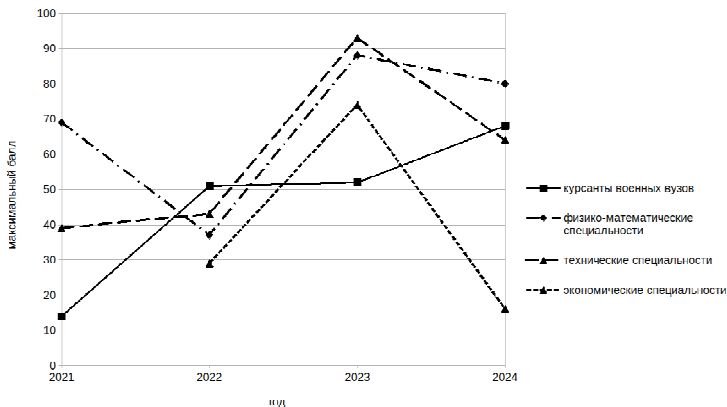


Рис. 4. Максимальный балл участников Всероссийской студенческой математической олимпиады по номинациям

На рис. 4 представлены максимальные баллы, набранные участниками по каждой группе подготовки. Картина несколько отличается от средних результатов. Видно, что максимальные результаты курсантов военных училищ растут из года в год, а в 2022 году, когда олимпиадные задания оказались сложными для всех участников, курсанты справились лучше других.

Сложностью при организации математической олимпиады в первой половине учебного года является то, что курсантами и студентами первого курса пройдена пока достаточно небольшая часть материала, изучаемого в цикле математических дисциплин. И при подготовке олимпиадных заданий требуется соблюсти баланс между школьным материалом и темами, изучаемыми в высших учебных заведениях. Необходимо подобрать такие задачи, которые, с одной стороны, позволят проявить себя наиболее талантливым в области математики учащимся, с другой стороны, не отпугнут студентов от участия в олимпиадном движении и дальнейшего углубленного изучения высшей математики в целом. Надеемся, что команда организаторов РГАТУ имени П.А. Соловьева успешно справляется с этой задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска / А.И. Бурцев, М.А. Башкин, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. С. 51–56.
2. Анализ результатов решения олимпиадных задач / Л.В. Березина, А.В. Васильева, А.И. Бурцев, М.А. Башкин // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. С. 51–64.
3. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / А.В. Васильева, Л.В. Березина, А.И. Бурцев, М.А. Башкин // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 58–67.
4. Березина Л.В. Сравнительный анализ одного из видов задач, предлагаемых на всероссийской студенческой математической олимпиаде / Л.В. Березина, А.В. Васильева, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 42–44.
5. Оленикова Ю.К. Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2023 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2024. С. 73–85.
6. Оленикова Ю.К. Задания и результаты Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2024 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 20. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2025. С. 76–84.

УДК 51:378

А. В. Васильева, Л. В. Березина, А. И. Бурцев

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net,
byrzev@rsatu.ru

ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ИМЕНИ П.А. СОЛОВЬЕВА 2024 ГОДА

Статья посвящена задачам Всероссийской студенческой математической олимпиады имени П.А. Соловьева 2024 года. Олимпиада проводилась для курсантов высших военных училищ и студентов всех специальностей и направлений подготовки первого года обучения на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А. Соловьева", город Рыбинск.

Ключевые слова: олимпиада по математике, задачи олимпиады, подготовка студентов

A. V. Vasileva, L. V. Berezina, A. I. Burzev

P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net,
byrzev@rsatu.ru

TASKS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT MATHEMATICAL OLYMPIAD NAMED AFTER P.A. SOLOVYOV IN 2024

The article is devoted to the tasks of the All-Russian Student Mathematical Olympiad named after P.A. Solovyov in 2024. The Olympiad was held for cadets of higher military schools and students of all specialties and areas of first-year study at the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University", the city of Rybinsk.

Keywords: Olympiad in mathematics, Olympiad tasks, student preparation

7 декабря 2024 года в Рыбинском государственном авиационном техническом университете имени П.А. Соловьева состоялась очередная Всероссийская студенческая математическая олимпиада для курсантов

высших военных училищ и студентов всех специальностей и направлений подготовки, обучающихся на первом курсе (о предыдущих олимпиадах см. [1–3]). В олимпиаде приняли участие учащиеся шестнадцати вузов из семи регионов России. Олимпиадные задания содержали вопросы по основным разделам школьного курса математики, начала математического анализа, матричной и векторной алгебры, аналитической геометрии.

Приведем конкурсные задания и их решения.

Задача 1. Чему равна сумма $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, если известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно неколлинеарные, но каждый из них коллинеарен сумме двух других?

Решение: По условию, $\vec{a} + \vec{b} = \alpha \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{b} = \beta \vec{a}$. Отсюда $\vec{a} - \vec{c} = \alpha \vec{c} - \beta \vec{a} \Leftrightarrow (1 + \beta)\vec{a} = (1 + \alpha)\vec{c}$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные, то $\alpha = \beta = -1$ и, следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$, то есть $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Задача 2. Найдите все значения x , при которых верно неравенство $\arctg(x\sqrt{2} + 1) + \arctg(x^2) + \arctg(1 - x\sqrt{2}) \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Решение: Пусть

$$f(x) = \arctg(x\sqrt{2} + 1) + \arctg(x^2) + \arctg(1 - x\sqrt{2}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{2}}{1 + (x\sqrt{2} + 1)^2} + \frac{2x}{1 + x^4} - \frac{\sqrt{2}}{1 + (x\sqrt{2} - 1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2(x^2 + x\sqrt{2} + 1)} - \frac{\sqrt{2}}{2(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} + \frac{2x}{1 + x^4} = \\ &= \frac{-2x}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} + \frac{2x}{1 + x^4} \equiv 0. \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа $f(x) = C$ – константа. Так как $f(0) = \frac{\pi}{2}$, то

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2}. \quad \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Задача 3. Докажите, что для любого натурального числа n большего единицы $\frac{n^n - n^2 + n - 1}{(n-1)^2} \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел).

Решение: Обозначим $k = n - 1 \Leftrightarrow n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{n^n - n^2 + n - 1}{(n-1)^2} &= \frac{(k+1)^{k+1} - (k+1)^2 + k + 1 - 1}{k^2} = \\ &= \frac{(k+1)^{k+1} - k^2 - k - 1}{k^2}. \end{aligned}$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1} - k^2 - k - 1}{k^2} = 1 \in \mathbb{N}. \quad k = 2 \Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1} - k^2 - k - 1}{k^2} = 5 \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} k \geq 3 \Rightarrow (k+1)^{k+1} - k^2 - k - 1 &= k^{k+1} + C_{k+1}^1 k^k + C_{k+1}^2 k^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{k-1} k^2 + C_{k+1}^k k + 1 - \\ &- k^2 - k - 1 = Mk^2 + C_{k+1}^k k - k = Mk^2 + (k+1)k - k = Mk^2 + k^2 = k^2(M+1), \end{aligned}$$

где M – целое число. Следовательно,

$$k \geq 3 \Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1} - k^2 - k - 1}{k^2} = M + 1 \in \mathbb{N}.$$

Задача 4. В единичный квадрат бросают 76 точек. Верно ли, что некоторые четыре из них окажутся внутри круга радиуса $1/7$?

Решение: Разобьем квадрат на 25 равных квадратов, имеющих сторону, равную $1/5$. По принципу Дирихле найдется хотя бы один из этих квадратов в котором лежит не менее четырех точек. Радиус круга описанный около этого квадрата равен $\frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{7}$.

Задача 5. На координатной плоскости даны точки $A(2, 2)$, $B(6, 2)$ и прямая $y = 2x$. На прямой $y = 2x$ найдите точку M , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Чему равен этот угол?

Решение: Точка M лежит на прямой $y = 2x$ и имеет координаты $M(x, 2x)$. Обозначим угол между векторами $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$ через α .

Так как $\overline{MA} = (2-x, 2-2x)$, $\overline{MB} = (6-x, 2-2x)$, то

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = (2-x)(6-x) + (2-2x)^2 = 5x^2 - 16x + 16 = 5\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} > 0.$$

Следовательно, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Построим окружность, описанную около треугольника ABM . Её радиус обозначим как R . По теореме синусов $\sin \alpha = \frac{|AB|}{2R} = \frac{2}{R}$. Так как функция $\sin$ строго возрастающая на интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, то α принимает максимальное значение, когда R принимает минимальное значение. Центр S окружности, описанной около треугольника ABM , лежит на пересечении срединных перпендикуляров, один из которых имеет уравнение $x = 4$, следовательно, уравнение описанной окружности имеет вид $(x-4)^2 + (y-a)^2 = R^2$, где a – некоторое число.

Так как точки A, B, M лежат на окружности, то выполняются равенства

$$\begin{cases} 2^2 + (2-a)^2 = R^2, \\ (-2)^2 + (2-a)^2 = R^2, \\ (x-4)^2 + (2x-a)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = a^2 - 4a + 8, \\ (x-4)^2 + (2x-a)^2 = R^2. \end{cases}$$

Точка $M(x, 2x)$ лежит на окружности, поэтому уравнение $(x-4)^2 + (2x-a)^2 = a^2 - 4a + 8$ имеет решение

$$(x-4)^2 + (2x-a)^2 = a^2 - 4a + 8 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x(a+2) + 4(a+2) = 0.$$

Дискриминант последнего квадратного уравнения равен

$$D = 16(a+2)^2 - 80(a+2) = 16(a+2)(a-3) \geq 0,$$

то есть $a \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, $R^2 = a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2 + 4$.

Функция $R(a) = \sqrt{(a-2)^2 + 4}$ убывает на $(-\infty, -2]$ и возрастает на $[3, +\infty)$. Следовательно, наименьшее значение функции $R(a)$ равно $R(-2)$ или $R(3)$. Так как $R(-2) = \sqrt{20}$, а $R(3) = \sqrt{5}$, то наименьшее значение

$R = \sqrt{5}$. Максимальное значение $\alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$. Координаты точки $M(x, 2x)$ найдем из уравнения $(x-4)^2 + (2x-3)^2 = 5$. Имеем

$$(x-4)^2 + (2x-3)^2 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $M(2, 4)$, $\alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = \arctg 2$.

Задача 6. Береговая линия русла реки (в пределах некоторой области) представляет параболу $y = x^2$, а котлован имеет форму цилиндра, верхним основанием которого является круг с центром в точке $C(6, 3)$ радиуса 1. Требуется соединить данную реку и котлован прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его нужно провести и каковой тогда будет длина канала?

Решение: Уравнение окружности Π с центром в точке $C(6, 3)$ радиуса $R = 1$ имеет вид $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 1$. Найдем точку $M(x, x^2)$ на параболе $y = x^2$, такую, что $g(x) = |MC| = \sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}$ имеет наименьшее значение.

Тогда

$$g'(x) = \frac{2(x-6) + 4x(x^2-3)}{2\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} = \frac{2x^3 - 5x - 6}{\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2(x-1)^2 + 1) \Leftrightarrow x = 2.$$

Если $x < 2$, то $g'(x) < 0$, если $x > 2$, то $g'(x) > 0$. Следовательно, $x = 2$ — точка минимума функции g . Точка M имеет координаты $(2, 4)$. Тогда $\overline{MC} = (4, -1)$, $|\overline{MC}| = \sqrt{17}$. Найдём точку A пересечения прямой MC и окружности Π . Прямая MC имеет уравнение $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-1} \Leftrightarrow x + 4y - 18 = 0$.

Точка A : $\begin{cases} (x-6)^2 + (y-3)^2 = 1, \\ x + 4y - 18 = 0 \end{cases}$. Находим решения системы

$$\begin{cases} (12-4y)^2 + (y-3)^2 = 1, \\ x = -4y + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y + 18 \\ 17y^2 - 102y + 152 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 + \frac{4}{\sqrt{17}} \\ y_1 = 3 - \frac{1}{\sqrt{17}} \\ x_2 = 6 - \frac{4}{\sqrt{17}} \\ y_2 = 3 + \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$A\left(6 - \frac{4}{\sqrt{17}}, 3 + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$. (Из двух точек пересечения прямой и окружности берем точку, которая лежит ближе к параболе). Уравнение касательной L_1

к параболе $y = x^2$ в точке M имеет вид $4x - y - 4 = 0$. И, следовательно, $L_1 \perp (4, -1)$. Касательная L_2 к окружности Π в точке A перпендикулярна вектору $\overline{MC} = (4, -1)$. (Уравнение касательной L_2 к окружности Π в точке A имеет вид $4x - y - 21 + \sqrt{17} = 0$). Отсюда получаем, что прямые L_1 и L_2 перпендикулярны одному и тому же вектору $(4, -1)$, а вектор $(4, -1) = \overline{MC}$. Следовательно, прямые L_1 и L_2 перпендикулярны прямой MA и параллельны между собой. Так как парабола – выпуклая кривая и круг – выпуклая фигура, то наименьшее расстояние между параболой и кругом равно расстоянию между точками M и A и равно $|\overline{MC}| - |\overline{AC}| = \sqrt{17} - 1$.

Ответ: Канал нужно провести через точки $A\left(6 - \frac{4}{\sqrt{17}}, 3 + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ и $M(2, 4)$, $|\overline{MA}| = \sqrt{17} - 1$.

Задача 7. Вычислите $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}^{2024}$, где i – мнимая единица.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = -iB, \quad A^{2024} = B^{2024}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7i \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15i \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Используя математическую индукцию покажем, что

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & (2^n - 1)i \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}. B^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (2^n - 1)i \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (2^{n+1} - 1)i \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$A^{2024} = B^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & (2^{2024} - 1)i \\ 0 & 2^{2024} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & (2^{2024} - 1)i \\ 0 & 2^{2024} \end{pmatrix}.$

Задача 8. Составьте уравнение касательной к графику чётной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, если известно, что для всех действительных x справедливо равенство

$$f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$$

Решение: Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Подставим $x = 1$ в равенство $f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2$, получим $f(1) - 4 \cdot f(-1) = -9$. Функция $y = f(x)$ – чётная функция, следовательно $f(-1) = f(1)$. Поэтому $f(1) - 4 \cdot f(1) = -9 \Rightarrow f(1) = 3$. Продифференцируем равенство

$$f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$$

Получим

$$\begin{aligned} f'(2x^3 - x) \cdot (6x^2 - 1) - 8x \cdot f(x^2 - x - 1) - 4x^2 f'(x^2 - x - 1) \cdot (2x - 1) = \\ = 40x^4 - 24x^2 - 22x. \end{aligned}$$

Подставим $x = 1$ в полученное равенство и будем иметь $f'(1) \cdot 5 - 8 \cdot f(-1) - 4f'(-1) = -6$. Учитывая, что $f(-1) = f(1)$ получим $5f'(1) - 24 - 4f'(-1) = -6$ или $5f'(1) - 4f'(-1) = 18$. Так как функция f – чётная, то $f(-x) = f(x)$ и $f'(-x) = -f'(x)$, $f'(-1) = -f'(1)$. Теперь $5f'(1) + 4f'(1) = 18 \Rightarrow f'(1) = 2$. Уравнение касательной имеет вид $y = 3 + 2(x - 1)$ или $2x - y + 1 = 0$.

Ответ: $2x - y + 1 = 0$.

Задача 9. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$.

Решение:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n^2 a_n} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n^2. \quad \text{Обозначим: } b_n = \frac{1}{a_n}. \quad \text{Тогда}$$

$$b_0 = 1, b_{n+1} = b_n + n^2.$$

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1 + 1, b_3 = 1 + 1 + 2^2, \dots, b_n = 1 + 1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2,$$

$$b_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6}{6} \cdot a_n = \frac{6}{2n^3 - 3n^2 + n + 6}.$$

$$\text{Ответ: } a_n = \frac{6}{2n^3 - 3n^2 + n + 6}.$$

Задача 10. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^4 + n^2 + 1} \right)$.

Решение. Функция $f(x) = \sin^2(x)$ является π -периодической непрерывной на всей числовой прямой функцией.

$$\sin^2(x + \pi) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x + 2\pi)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \sin^2(x).$$

$$\sin^2 \left(\pi \sqrt{n^4 + n^2 + 1} \right) = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 \pi \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi(n^2 + 1)}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^4 + n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{\pi(n^2 + 1)}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} \right) =$$

$$= \sin^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n^2 + 1)}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

Ответ: 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска / А.И. Бурцев, М.А. Башкин, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. С. 51-56.
2. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / А.И. Бурцев, М.А. Башкин, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 58-67.
3. Задачи Всероссийской студенческой математической олимпиады имени П.А. Соловьева А.И. Бурцев, М.А. Башкин, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 45-52.

УДК 51

Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов, С. А. Старостина

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова,
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru, sardana-starostina@mail.ru

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И КОРНИ ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЧЛЕНА

Дан материал по теме «Выпуклые множества и многочлены» для занятий студенческого математического кружка. Приведены задачи для самостоятельной работы студентов.

Ключевые слова: евклидово пространство, выпуклое множество, замкнутое множество, выпуклая оболочка множества, отделимость точки и множества, корни производной многочлена

N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov, S. A. Starostina

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru, sardana-starostina@mail.ru

CONVEX SETS AND ROOTS OF THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL

We give a material on the topic “Convex sets and polynomials” for the student mathematics club. Problems for independent work of students are given.

Keywords: Euclidean space, convex set, closed set, convex hull of a set, separability of a point and a set, roots of the derivative of a polynomial.

1. Выпуклые множества

Пусть $\mathbb{R}^m$ – m -мерное евклидово пространство с нормой (длиной)

$|a| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$, где $a = (x_1, \dots, x_m)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$ – точки (векторы) из $\mathbb{R}^m$.

Далее, как правило, $m = 2; 3$.

Для $a, b \in \mathbb{R}^m$ справедливы неравенства треугольника

$$\|a-b\| \leq \|a \pm b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Докажем, например, для $m=2,3$ неравенство $\|a-b\| \leq \|a\| + \|b\|$, используя скалярное произведение векторов:

$$\begin{aligned} \|a-b\|^2 &= (a-b) \cdot (a-b) = a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b = \|a\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos(\widehat{a,b}) + \|b\|^2 \leq \\ &\leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2. \end{aligned}$$

Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *выпуклым*, если для любых точек $a, b \in A$

$$[a, b] := \{ta + (1-t)b : 0 \leq t \leq 1\} \subset A.$$

Примеры выпуклых множеств:

1) Пустое множество $\emptyset$ – по определению; 2) одноэлементное множество $\{a\} \in \mathbb{R}^m$ – поскольку $[a, a] = \{a\} \subset \{a\}$; 3) $\mathbb{R}^m$ – очевидно; 4) любой промежуток в $\mathbb{R}$ – очевидно; 5) круг $K = \{a \in \mathbb{R}^2 : \|a - a_0\| \leq r\}$ с центром в точке $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $r \geq 0$ – поскольку для $b, c \in K$ и $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|tb + (1-t)c - a_0\| &= \|t(b - a_0) + (1-t)(c - a_0)\| \leq t\|b - a_0\| + (1-t)\|c - a_0\| \leq \\ &\leq tr + (1-t)r = r. \end{aligned}$$

Отображение $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *линейным*, если

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^m \text{ и } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1. *Линейный образ выпуклого множества является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое множество, $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Покажем, что образ $F(A) = \{F(a) : a \in A\}$ является выпуклым множеством.

Пусть $u, \tilde{u} \in F(A)$, $t \in [0, 1]$; $u = F(a)$, $\tilde{u} = F(\tilde{a})$ для некоторых $a, \tilde{a} \in A$. Поскольку множество A является выпуклым, то $ta + (1-t)\tilde{a} \in A$. Тогда $tu + (1-t)\tilde{u} = tF(a) + (1-t)F(\tilde{a}) = F(ta + (1-t)\tilde{a}) \in F(A)$ и, значит, $[u, \tilde{u}] \subset F(A)$. Следовательно, $F(A)$ — выпуклое множество. ■

Рассмотрим линейное отображение $F(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (px, qy)$. Поскольку $\frac{\tilde{x}^2}{p^2} + \frac{\tilde{y}^2}{q^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$, то $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \leq 1 \right\} = F(K)$,

Отметим, что в $\mathbb{R}^m$ сходимость последовательности $a_n = (a_n^1, \dots, a_n^m)$ к $a_0 = (a_0^1, \dots, a_0^m)$ при $n \rightarrow \infty$ равносильна покоординатной сходимости: $a_n^k \rightarrow a_0^k$, $k=1, \dots, m$, при $n \rightarrow \infty$, поскольку

$$\max_k |a_n^k - a_0^k| \leq |a_n - a_0| \leq \sum_{k=1}^m |a_n^k - a_0^k|.$$

Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *замкнутым*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$ для любой сходящейся последовательности $\{a_n\} \subset A$.

Приведём примеры замкнутых множеств.

1) Пустое множество $\emptyset$ замкнуто по определению.

2) Конечное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \subset \mathbb{R}^m$ — поскольку $\min_{k \neq j} |a_k - a_j| > 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$.

3) Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — так как если $\{x_n\} \subset [a, b]$, $x_n \rightarrow x_0$, то $a \leq x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$.

4) Круг $K = \{a \in \mathbb{R}^2 : |a - a_0| \leq r\}$. Действительно, если $\{a_n\} \subset K$ и $a_n \rightarrow b$, то $|b - a_0| = |(a_n - a_0) - (a_n - b)| \leq |a_n - a_0| + |a_n - b| \leq r + |a_n - b|$. Переходя к пределу в неравенстве $|b - a_0| \leq r + |a_n - b|$, получим

$$|b - a_0| \leq r \Leftrightarrow b \in K.$$

5) Полуплоскость $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma \geq 0\}$, где постоянные $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. В самом деле, пусть $\{a_n\} \subset H$ и $a_n \rightarrow a_0$, где $a_n = (x_n, y_n)$, $a_0 = (x_0, y_0)$. Поэтому $\alpha x_n + \beta y_n + \gamma \geq 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma \geq 0$, то есть $a_0 = (x_0, y_0) \in H$.

Теорема 3. *Пересечение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_l$ ($l \in \mathbb{N}$) — замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$, $\{a_n\} \subset \bigcap_{k=1}^l A_k$ и $a_n \rightarrow a_0$. Так как $\{a_n\} \subset A_k$ для $k=1, 2, \dots, l$, то $a_0 \in A_k$ для $k=1, 2, \dots, l$. Следовательно, $a_0 \in \bigcap_{k=1}^l A_k$. ■

Следствие. Пересечение выпуклых замкнутых полуплоскостей в силу теорем 2 и 3 является выпуклым замкнутым множеством.

3. Теорема отделимости на плоскости

Говорят, что прямая $L \subset \mathbb{R}^2$ (строго) отделяет множество $A \subset \mathbb{R}^2$ и точку $b \in \mathbb{R}^2$, если множество A и точка b лежат в разных полуплоскостях, на которые L разбивает $\mathbb{R}^2$, причем $b \notin L$. Если $b = (x_1, y_1)$, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ — уравнение прямой L , то, не умаляя общности, можем считать, что $A \subset H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma \geq 0\}$, $\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma < 0$.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda \leq x$ для $\forall x \in X$.

Инфимумом ограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число $\mu \in \mathbb{R}$ такое, что: 1) $\mu \leq x$ для $\forall x \in X$ и 2) для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < \mu + \varepsilon$. Обозначается $\mu = \inf X$ или $\mu = \inf \{x : x \in X\}$.

Будем считать известным, что у ограниченного снизу множества X инфимум существует и конечен (см., например, [2]). Из ограниченного снизу множества X можно выбрать последовательность, сходящуюся к инфимуму X . Действительно, пусть $\mu = \inf X$. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists x_n \in X : \mu \leq x_n < \mu + \frac{1}{n}$. Следовательно, $x_n \rightarrow \mu$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4 (принцип выбора Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^m$). Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^m$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Рассмотрим случай $m=2$ (для $m=3$ доказательство аналогично). Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^2$, $a_n = (x_n, y_n)$, — ограниченная последовательность, то есть $|a_n| \leq C$ для некоторой константы C и всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|x_n| \leq |a_n| \leq C$ и $|y_n| \leq C$ при всех $n \in \mathbb{N}$. По принципу выбора в $\mathbb{R}$ (см., например, [2]) из последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ можно выбрать сходящуюся к x_0 подпоследовательность $\{\tilde{x}_k\}$. Пусть $\tilde{a}_k = (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$. По принципу выбора в $\mathbb{R}$ из последовательности $\{\tilde{y}_k\}$ можно выбрать сходящуюся к y_0 подпоследовательность $\{\hat{y}_l\}$. Тогда подпоследовательность $\hat{a}_l = (\hat{x}_l, \hat{y}_l)$ сходится к $a_0 = (x_0, y_0)$ при $l \rightarrow \infty$.

Теорема 5 (об отделимости множества и точки на плоскости). Не-пустое выпуклое замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^2$ и точку $b \notin A$ можно строго отделить прямой.

Доказательство. Множество $X = \{|b-a|: a \in A\} \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу. Пусть $\mu = \inf X$. Тогда в X найдется последовательность $x_n = |b-a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$, где $a_n \in A$. Поскольку $|a_n| \leq |b-a_n| + |b| = x_n + |b|$, то последовательность $\{a_n\}$ ограничена и, по теореме 4, существует подпоследовательность $\hat{a}_l \rightarrow a_0$. Так как множество A замкнуто, то $a_0 \in A$ и $|b-a_0| = \lim_{l \rightarrow \infty} |b-\hat{a}_l| = \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{x}_l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \mu$. Поскольку $b \notin A$, то $\mu > 0$.

Через точку a_0 проведем прямую L перпендикулярно отрезку $[a_0, b]$. Пусть $b \in H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \alpha x + \beta y + \gamma < 0\}$, где $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ – уравнение прямой L .

Покажем, что $A \cap H = \emptyset$. Действительно, в противном случае существует точка $c \in A \cap H$. Так как множество A является выпуклым, то $[a_0, c] \subset A$. Поскольку $b, c \in H$, то угол φ между отрезками $[a_0, b]$ и $[a_0, c]$ острый, и, значит, $|b-d| < |b-a_0| = \mu$ для всех $d \in (a_0, c]$, достаточно близких к точке a_0 . Получили противоречие с определением $\mu = \inf X$. ■

Следствие. Если $M \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклый замкнутый многоугольник и $b \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, то M и b строго отделены некоторой прямой.

4. Выпуклая оболочка множества

Выпуклой комбинацией точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ называется сумма

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \in \mathbb{R}^m$, в которой $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$,

$n \in \mathbb{N}$. В частности, при $n=1$ точка $a_1 = 1 \cdot a_1$ – выпуклая комбинация.

Выпуклой оболочкой множества $A \subset \mathbb{R}^m$ называется множество $B \subset \mathbb{R}^m$ всевозможных выпуклых комбинаций точек из A . Обозначается $B = \text{co } A$ – сокращение от *convex hull* (выпуклая оболочка). Таким образом,

$$\text{co } A = \left\{ b \in \mathbb{R}^m: b = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k, \lambda_k \geq 0, a_k \in A, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Очевидно, что $A \subset \text{co } A$.

Лемма 1. Если $B \subset \mathbb{R}^m$ непустое выпуклое множество, то оно содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.

Доказательство. Применим метод математической индукции по числу $n \in \mathbb{N}$, где n – число точек в выпуклой комбинации. Для $n=1$ и

$n = 2$ выпуклая комбинация одной или двух точек из B , очевидно, принадлежит выпуклому множеству B .

Пусть при некотором $n \geq 2$ выпуклая комбинация n любых точек из B принадлежит B . Рассмотрим выпуклую комбинацию, состоящую из

$(n+1)$ -й точки множества B : $\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k b_k$, где $b_k \in B$, $\beta_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k = 1$. Если

$\sum_{k=1}^n \beta_k = 0$, то $\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k b_k = b_{n+1} \in B$. Пусть $\sum_{k=1}^n \beta_k > 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k b_k = (1 - \beta_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k b_k}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} + \beta_{n+1} b_{n+1} \in B,$$

как выпуклая комбинация точек $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k b_k}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}$ и b_{n+1} из множества

B . ■

Теорема 6. Для $A \subset \mathbb{R}^m$ выпуклая оболочка $\text{co} A$ есть наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее A .

Доказательство. Покажем сначала, что $\text{co} A$ — выпуклое

множество. Для любых $a, b \in \text{co} A$ имеем $a = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$, $b = \sum_{p=1}^s \beta_p b_p$ — вы-

пуклые комбинации точек $a_k, b_p \in A$, $k = 1, \dots, n$, $p = 1, \dots, s$. Тогда

$ta + (1-t)b = \sum_{k=1}^n t\lambda_k a_k + \sum_{p=1}^s (1-t)\beta_p b_p \in \text{co} A$, для $\forall t \in [0, 1]$, как выпуклая

комбинация точек $a_k, b_p \in A$, $k = 1, \dots, n$, $p = 1, \dots, s$, поскольку

$$t\lambda_k \geq 0, (1-t)\beta_p \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^n t\lambda_k + \sum_{p=1}^s (1-t)\beta_p = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1.$$

Пусть B — произвольное выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, содержащее A . Тогда любая выпуклая комбинация из A принадлежит B . Следовательно, $\text{co} A \subset B$ по лемме 1. Значит $\text{co} A$ — наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее A . ■

Приведем примеры выпуклых оболочек.

1) Для точек $a, b, c \in \mathbb{R}^m$, $\text{co}(\{a\}) = \{a\}$; $\text{co}(\{a, b\}) = [a, b]$; $\text{co}(\{a, b, c\})$ — треугольник с вершинами в точках a, b, c , если эти точки не лежат на одной прямой.

2) Для точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^2$ ($n \geq 3$), не лежащих на одной прямой, $\text{co}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$ – выпуклый многоугольник M_k , имеющий k сторон $3 \leq k \leq n$.

3) Для единичной окружности $S = \{a \in \mathbb{R}^2 : |a| = 1\}$ выпуклая оболочка $\text{co}S = K$ – единичный круг.

5. Корни производной многочлена с комплексными коэффициентами

По основной теореме алгебры любой многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учетом их кратности. Простое доказательство этой теоремы приведено в [3].

Будем использовать понятие выпуклой оболочки и теорему отделимости точки и множества для того, чтобы определить (уточнить) область на плоскости, в которой лежат корни производной многочлена с комплексными коэффициентами.

Комплексные числа $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, i — мнимая единица ($i^2 = -1$), будем интерпретировать как точки (x, y) на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\mathbb{C}$ множество всех комплексных чисел. Аналогом длины вектора (x, y) в множестве $\mathbb{C}$ служит модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $z = x + iy$. Отметим, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|z| = |\bar{z}|$, $\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k$, $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$; $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.

Лемма 2. Пусть $a, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ и точка a строго отделима от множества $\{z_k\}_{k=1}^n$. Тогда $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k - a} \neq 0$.

Доказательство. Допустим, от противного, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k - a} = 0 &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\overline{z_k - a}}{|z_k - a|^2} = 0 = \sum_{k=1}^n \frac{z_k - a}{|z_k - a|^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k, &\text{ где } \lambda_k = \frac{|z_k - a|^{-2}}{\sum_{l=1}^n |z_l - a|^{-2}} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Значит, $a \in \text{co}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\})$. Поэтому точка a принадлежит любой полуплоскости, в которой лежит множество $\{z_k\}_{k=1}^n$. Следовательно, a нельзя строго отделить от $\{z_k\}_{k=1}^n$. Получили противоречие. ■

Теорема 7 (Гаусс-Люка). Пусть

$$P(z) = \sum_{k=1}^n c_k z^k \quad (c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, \dots, n)$$

— многочлен степени $n \geq 2$. Тогда корни производной $P'(z) = \sum_{k=1}^n k c_k z^{k-1}$ лежат в выпуклой оболочке корней $z_1, z_2, \dots, z_n$ многочлена $P(z)$.

Доказательство. Имеем, $P(z) = c \prod_{k=1}^n (z - z_k)$, где $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.

Тогда $P'(z) = P(z) \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}$. Отсюда следует, что

$$P'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(z) = 0, \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} = 0. \end{cases}$$

Поэтому любой корень z_0 производной $P'(z)$ либо совпадает с некоторым корнем z_l многочлена $P(z)$, $l = 1, 2, \dots, n$, либо $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_0 - z_k} = 0$. По лемме 2 точку z_0 и множество $\{z_k\}_{k=1}^n$ нельзя строго отделить никакой прямой. Выпуклая оболочка $\text{co}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\})$ или состоит из одной точки, или является отрезком, или многоугольником; в любом случае $\text{co}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\})$ — выпуклое замкнутое множество. По теореме 5 точка $z_0 \in \text{co}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\})$.

Замечание. Дополнительный материал по теме статьи можно найти в [1, 3].

6. Задачи для самостоятельного решения

1) Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ ($m = 1, 2, 3$) — выпуклое множество. Доказать, что $A = \text{co } A$.

2) Доказать, что открытая полуплоскость $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma < 0\}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, является выпуклым множеством.

3) Доказать, что шар $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ является выпуклым замкнутым множеством, и $B = \text{co } S$, где $S = \{a \in \mathbb{R}^3 : |a| = R\}$ — сфера радиуса R .

4) Доказать, что эллипсоид $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \leq 1\}$, где α, β, γ его полуоси, является выпуклым замкнутым множеством.

5) Доказать, что надграфик $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ параболы $y = x^2$ является выпуклым замкнутым множеством.

6) Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ выпукла вниз на всей оси. Доказать, что ее надграфик $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ является выпуклым замкнутым множеством.

7) Доказать, что треугольник в $\mathbb{R}^m$ ($m=2,3$) является выпуклой оболочкой своих вершин.

8) Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ ($m=1,2,3$). Доказать, что $\text{co } A$ — ограниченное замкнутое множество.

9) Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — непустое выпуклое замкнутое множество и точка $b \notin A$. Доказать, что ближайшая к b точка из множества A единственна.

10) Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые замкнутые непересекающиеся множества и одно из них ограничено. Доказать, что A и B можно строго отделить прямой. Привести пример замкнутых выпуклых неограниченных непересекающихся множеств $C, D \subset \mathbb{R}^2$, которые нельзя строго отделить прямой.

11) Для $A \subset \mathbb{R}^m$ диаметр $\text{diam } A = \sup\{|a - b| : a, b \in A\}$ ($\sup$ — супремум множества). Доказать, что $\text{diam}(\text{co } A) = \text{diam } A$ для ограниченного множества A .

12) Алгебраической суммой множеств $A, B \subset \mathbb{R}^m$ ($m=1,2,3$) называется множество $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Доказать, что если A и B — выпуклые множества, то $A + B$ — выпуклое множество.

- 13) Доказать, что $\text{co}(A+B) = \text{co}A + \text{co}B$ для любых $A, B \subset \mathbb{R}^m$.
- 14) Пусть $h(A, B)$ – расстояние (метрика) Хаусдорфа (см. [1]) между множествами A и B из $\mathbb{R}^m$ ($m=1,2,3$); $\lambda(C) = h(C, \text{co}C)$ – мера невыпуклости множества $C \subset \mathbb{R}^m$. Доказать, что:
- а) $\lambda(A+B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$;
- б) $\lambda(A+B) \leq \sqrt{\lambda^2(A) + \lambda^2(B)}$, где $A, B \subset \mathbb{R}^2$.
- 15) (См. [3]) Доказать, что:
- а) если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, то треугольник с вершинами в точках $a, b, c \in \mathbb{C}$ содержит начало координат;
- б) всякий корень уравнения $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} = 0$ лежит в треугольнике с вершинами $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
- в) если корни многочлена 3-й степени лежат в единичном круге, то корни его производной также лежат в этом круге.
- 16) Доказать, что все корни многочлена $nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1$, $n \geq 2$, лежат в единичном круге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу / М.: Физматлит, 2014. 188 с.
2. Гулевич Н.М. Теоремы Больцано-Коши и Вейерштрасса / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. СПб.: СПбГУВК, 2009. Вып. 2. С.55-63.
3. Иванов О.А. Элементарная математика. М.: МЦНМО, 2009. 384 с.

УДК 51:378

Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

ЗАДАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 2024 ГОДА

Приведены задания Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной Ярославским государственным техническим университетом в октябре 2024 года, примеры их решения, итоги олимпиады и их анализ.

Ключевые слова: студенческая математическая олимпиада, решение задач

Ju. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

TASKS AND RESULTS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIADS IN MATH 2024

We present the tasks of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics, held by Yaroslavl State Technical University in October 2024, examples of their solutions, the results of the Olympiad and their analysis.

Keywords: student mathematical Olympiad, task solution

Введение. В 2024 году исполнилось 25 лет с начала проведения Всероссийских студенческих олимпиад (ВСО) по математике Ярославским государственным техническим университетом (ЯГТУ). Продолжают происходить изменения как в образовательном процессе России, так и в олимпиадном движении. Если в прошлой публикации [1] мы отмечали уменьшение количества проводимых олимпиад, то сейчас положение стало меняться. Так, уже не первый год проводят Всероссийские математические олимпиады постоянные участники олимпиад ЯГТУ: в Москве преподаватели МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством д.ф.м.н, профессора О.В. Пугачева; в Твери, в ВА ВКО, под руководством к.ф.м.н. доцента С.Ю. Жарова, а в Рязани в РГРТУ вместо математической олимпиады ста-

ли проводить физико-математическую. И ярославских олимпиад, по-прежнему две: для студентов 2-го и старших курсов они проводятся ЯГТУ в Ярославле [1–3], а для студентов 1-го курса РГАТУ в Рыбинске [4–5].

Все эти олимпиады сохраняют традиции и цели олимпиад: выявление талантливейшей молодёжи и повышение качества фундаментального образования в России и пользуются успехом как у студентов, так и у олимпиадного сообщества преподавателей. Они разные по форме, но организаторы находятся в тесном сотрудничестве и согласовывают между собой даты проведения.

В настоящее время у государства возрастает реальная потребность в повышении качества образования и воспитания подрастающего поколения. Предполагается увеличение доли математики и естественных наук в учебных планах и программах подготовки специалистов. Соответствующие олимпиады наряду с другими культурно-массовыми и научными мероприятиями вносят свой вклад в реализацию этих задач.

1. Итоги олимпиады

Всего в олимпиаде приняли участие 115 студентов и курсантов (42 второкурсника и 73 старшекурсника) – представители 20 вузов десяти регионов и четырех федеральных округов России: Центрального, Северо-Западного, Сибирского и Приволжского.

Список вузов-участников олимпиады: ВА ВКО (Тверь); ВА РВСН (Балашиха); ВА РХБЗ (Кострома); МФТИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, РТУ МИРЭА, НИУ МГСУ, НИЯУ МИФИ; РЭУ им. Г.В. Плеханова (Москва); НГТУ и СибГУТИ (Новосибирск); ВКА им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург); РГАТУ (Рыбинск); РГРТУ (Рязань); СамГТУ (Самара); ФВА РВСН (Серпухов); ВУРЭ (Череповец); ЯГТУ, ЯрГУ и ЯВВУ ПВО (Ярославль).

В этом году впервые было решено проводить олимпиаду по общему комплекту задач, хотя итоги подводились по-прежнему по номинациям. Как это отразилось на итогах, и хорошо это или плохо, можно решать, анализируя табл. 1. Но один положительный момент был: впервые за 25-летнюю историю олимпиад мы могли назвать абсолютных победителей и призеров.

Как всегда в олимпиадах ЯГТУ в соответствии с критериями оценки представленных решений правильно решенными задачами мы считаем задачи, оцененные в 8, 9 и 10 баллов (8 и 9 ставятся за мелкие недочеты, согласованные жюри до или в процессе проверки работ). Далее представлена итоговая таблица 1 доли правильно решивших задач по номинациям, победители и призеры олимпиады.

Таблица 1. Доля участников, правильно решивших задачи по номинациям «Математика и естественные науки», «Технологии и технические науки» (соответствующие обозначения в таблице: М и Т)

2-й курс

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
М	8 %	0 %	7 %	3 %	17 %	4 %	8 %	0 %	0 %	7 %
Т	17 %	4 %	4 %	9 %	5 %	2 %	4 %	0 %	0 %	4 %

старшие курсы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
М	7 %	7 %	4 %	4 %	3 %	3 %	3 %	33 %	9 %	2 %
Т	8 %	8 %	4 %	6 %	8 %	6 %	2 %	6 %	2 %	6 %

АБСОЛЮТНЫЕ ПОБЕДИТЕЛИ и ПРИЗЕРЫ ОЛИМПИАДЫ

В личном конкурсе

І место – студенты МФТИ Богданов Я.В., Кулешов С.И. и Афанасьев М.И.; ІІ место – Хабаров А.М. (ЯГТУ); ІІІ место – Косицына А.В. (ЯГТУ)

В командном конкурсе

І место – ЯГТУ; ІІ место – МФТИ; ІІІ место – НИЯУ МИФИ.

ПОБЕДИТЕЛИ и ПРИЗЕРЫ ОЛИМПИАДЫ В НОМИНАЦИЯХ

1) МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ,

2-й КУРС

В личном конкурсе

І место – Влашук Д.С. (МФТИ); ІІ место –Тарлинский С.В. (МФТИ)
ІІІ место – Мизанов И.П. (РТУ МИРЭА) и Круглышев А.В. (ЯрГУ)

В командном конкурсе

І место – ЯрГУ; ІІ место – НГТУ; ІІІ место – СамГТУ.

**2) МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ,
СТАРШИЕ КУРСЫ**

В личном конкурсе

І место – Лосев А.В. (НИЯУ МИФИ); ІІ место – Романов В.А. (МФТИ);
ІІІ место – Макаров С.Д. (НИЯУ МИФИ) и Чебыкин О.С. (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

В командном конкурсе

І место – МГТУ им. Н.Э. Баумана; ІІ место – РТУ МИРЭА, ЯрГУ и НГТУ; ІІІ место – СамГТУ.

3) ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИИ,

2-й КУРС

В личном конкурсе

I место – Анищенко А.В. (НИЯУ МИФИ); II место – Погосов А.С. (РТУ МИРЭА); III место – Итрухин Н.А. (НИЯУ МИФИ), Рожнов М.В. (ФВА РВСН).

В командном конкурсе

I место – РТУ МИРЭА; II место – ФВА РВСН; III место – ВА ВКО им. А.Ф. Можайского, МГТУ им. Н.Э. Баумана и ЯВВУ ПВО.

4) ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИИ,
СТАРШИЕ КУРСЫ

В личном конкурсе

I место – Бабух В.А. (ВА ВКО им. А.Ф. Можайского); II место – Климов Н.А. (НИЯУ МИФИ); III место – Кибардин Д.Ю. (ВА РВСН).

В командном конкурсе

I место – ВА ВКО им. А.Ф. Можайского; II место – ФВА РВСН;
III место – ВА РВСН и МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Объявленная в Положении номинация «Науки об обществе и образование» была представлена всего двумя вузами, поэтому жюри постановило итоги по данной номинации не подводить, но команду студентов РЭУ им. Г.В. Плеханова в составе И.Ю. Чикин и В.П. Соловьев, показавшую лучший результат среди всех команд второго курса, наградить дипломом «За III МЕСТО среди студентов 2-го курса»

2. Задачи и решения

1. Найти все матрицы X , удовлетворяющие следующим условиям

$$AX^2 + BX - A = O, \det X = 1,$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, O – нулевая матрица.

◀ Перепишем уравнение в виде $X^{-1} - X = A^{-1}B$. Если $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то

$X^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ и уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} d-a & -2b \\ -2c & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда $b = -5$, $c = -1$, $d = a - 1$. Подставляя эти выражения в равенство $\det X = ad - bc = 1$, получаем $a^2 - a - 6 = 0$. Отсюда находим $a = 3$ или $a = -2$ и, соответственно, $d = 2$ или $d = -3$. Итак, $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ или

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые и неколлинеарные. Найти все векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ такие, что

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{x} - \vec{b} \times \vec{y} = \vec{0}, \\ \vec{b} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{y} = \vec{0}. \end{cases}$$

◀ Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ удовлетворяют системе. Умножим первое уравнение скалярно на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$. Получим

$$\begin{cases} \vec{a}(\vec{a} \times \vec{x}) - \vec{a}(\vec{b} \times \vec{y}) = 0, \\ \vec{b}(\vec{a} \times \vec{x}) - \vec{b}(\vec{b} \times \vec{y}) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \vec{a}(\vec{b} \times \vec{y}) = 0, \\ \vec{b}(\vec{a} \times \vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Тем самым, векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ компланарны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и потому

$$\vec{x} = x_1 \vec{a} + x_2 \vec{b}, \quad \vec{y} = y_1 \vec{a} + y_2 \vec{b}.$$

Подставляя эти выражения в систему, получим

$$\begin{cases} x_1(\vec{a} \times \vec{a}) + x_2(\vec{a} \times \vec{b}) - y_1(\vec{b} \times \vec{a}) - y_2(\vec{b} \times \vec{b}) = \vec{0}, \\ x_1(\vec{b} \times \vec{a}) + x_2(\vec{b} \times \vec{b}) + y_1(\vec{a} \times \vec{a}) + y_2(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}. \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (x_2 + y_1)(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}, \\ (y_2 - x_1)(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}. \end{cases}$$

Так как $(\vec{a} \times \vec{b}) \neq \vec{0}$, то $x_1 = y_2 = \lambda$ и $y_1 = -x_2 = \mu$ можно взять любыми.

Ответ. $\vec{x} = \lambda \vec{a} - \mu \vec{b}$, $\vec{y} = \mu \vec{a} + \lambda \vec{b}$, где λ и μ произвольные числа. ▶

3. На окружности с центром в точке $C(3,0)$ и радиусом 2 найти точки, касательная к окружности в которых проходит и через начало координат.

Решение 1 (касательная к окружности имеет единственную общую точку с окружностью). ◀ Точка пересечения прямой, проходящей через начало координат и окружности, удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} y = kx, \\ (x-3)^2 + y^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx, \\ (k^2 + 1)x^2 - 6x + 5 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $(5/3, \sqrt{20}/3)$ и $(5/3, -\sqrt{20}/3)$, если $9 - 5(k^2 + 1) = 0$, то есть $k = 2/\sqrt{5}$ или $k = -2/\sqrt{5}$. ▶

Решение 2 (касательная к окружности $\perp$ радиусу). ◀ Точка $M(x, y)$ на окружности удовлетворяет сформулированным условиям тогда и только тогда, когда

$$(x-3)^2 + y^2 = 4 \text{ и } \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CM} = x(x-3) + y^2 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим $x = 5/3$, $y = \pm\sqrt{20}/3$. ▶

Решение 3 (использующее уравнение касательной к линии уровня). ◀ Точка (x_0, y_0) лежит на окружности тогда и только тогда, когда

$$(x_0 - 3)^2 + y_0^2 = 4. \quad (1)$$

Уравнение касательной к окружности $(x-3)^2 + y^2 = 4$ в ее точке (x_0, y_0) имеет вид $(x_0 - 3)(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$. Подставляя сюда координаты $x = y = 0$, получим

$$(x_0 - 3)x_0 + y_0^2 = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим $x = 5/3$, $y = \pm\sqrt{20}/3$. ▶

4. Найти все решения $x \in (0, \infty)$ уравнения $x^{x^{10}} = 10$.

◀ Равносильное уравнение $x^{10} \lg x = 1$. При $x \leq 1$ у него решений нет. Так как $f(x) = x^{10} \lg x$ при $x > 1$ – возрастающая функция, то $x = \sqrt[10]{10}$ – единственное решение. ▶

5. Решить неравенство $|z-i|+|z+i|\leq 2|z|$, $z\in\mathbb{C}$.

◀ Для любого $z=x+iy\in\mathbb{C}$ $2|z|=|z+i+z-i|\leq|z-i|+|z+i|$. Следовательно, предлагаемое неравенство равносильно уравнению $|z-i|+|z+i|=2|z|$. Уравнение $|z-i|+|z+i|=2a$ при $a>1$ задает эллипс $\frac{x^2}{a^2-1}+\frac{y^2}{a^2}=1$ с фокусами в точках $\pm i$, при $a=1$ отрезок $x=0$, $-1\leq y\leq 1$, при $a<1$ пустое множество. Уравнение $2|z|=2a$ при $a\geq 1$ задает окружность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. Система уравнений $\frac{x^2}{a^2-1}+\frac{y^2}{a^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ имеет два решения $x=0, y=a$ и $x=0, y=-a$. При $a=1$ условиям $x=0$, $-1\leq y\leq 1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ удовлетворяют $x=0, y=1$ и $x=0, y=-1$.

Ответ. $z=ai$ и $z=-ai$, где $a\geq 1$. ►

6. Вычислить $\lim_{n\rightarrow\infty} n^2 \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$.

◀ Обозначим $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$. Так как $0 < I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, то $\lim_{n\rightarrow\infty} I_n = 0$. Дважды интегрируя по частям, получаем

$$I_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)} I_{n+2} = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} [1 - \pi I_{n+2}].$$

Так как $\lim_{n\rightarrow\infty} I_{n+2} = 0$, то $I_n : \frac{\pi}{n^2}$, и потому $\lim_{n\rightarrow\infty} n^2 I_n = \pi$.

Ответ. Предел равен π . ►

7. Найти множество значений функции $f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$.

$$\leftarrow f(x, y) = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{x+y} = g(t, s) = \frac{\sin t}{t} \cos s,$$

где обозначено $t = \frac{x+y}{2}$, $s = \frac{x-y}{2}$. Так как $-1 < \frac{\sin t}{t} < 1$, $-1 \leq \cos s \leq 1$, то $-1 < g(t, s) < 1$, Так как $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\cos \pi = -1$, $\cos 0 = 1$, то $\lim_{t \rightarrow +0} g(t, \pi) = -1$
 $\lim_{t \rightarrow +0} g(t, 0) = 1$. По теореме Коши о промежуточных значениях $E(f) = E(g) = (-1, 1)$. ►

8. Доказать, что дифференциальное уравнение

$$t \frac{dx}{dt} = x + x^2 + t^2 \quad (3)$$

имеет решение $x = x(t)$, определенное на интервале (a, b) , содержащем нуль, и удовлетворяющее условиям $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$.

► Пусть сначала $t \neq 0$. Сделаем в уравнении замену $x(t) = t \cdot y(t)$, $y(t) = x(t)/t$. Получим уравнение $t^2 \frac{dy}{dt} + ty = ty + t^2 y^2 + t^2$ или $\frac{dy}{dt} = y^2 + 1$. Любое решение последнего уравнения имеет вид $y = \operatorname{tg}(t + C)$, $t \in (a, b)$, где $(a + C, b + C)$ – интервал, содержащийся в области определения тангенса. По условию $0 \in (a, b)$. Тогда $x(t) = t \cdot \operatorname{tg}(t + C)$ удовлетворяет уравнению (3) при всех $t \in (a, b)$, включая и $t = 0$. Кроме того, $x(0) = 0$. Так как $\frac{dx}{dt}(0) = \operatorname{tg} C$, то условие $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ выполняется только при $C = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $x(t) = t \cdot \operatorname{tg} t$ при $t \in (a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$ – искомое решение. ►

9. Показать, что существует единственная функция $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям $y''(x) = \sin(\pi x^2)$, $y(0) = y'(1) = 0$. Вычислить $y(1)$.

► Достаточно показать, что существует единственное решение $y(x)$, $z(x)$, $x \in \mathbb{R}$, системы уравнений $y' = z$, $z' = \sin(\pi x^2)$, удовлетворяющее условиям $y(0) = z(1) = 0$. Второе уравнение имеет единственное решение,

удовлетворяющее этим условиям: $z(x) = \int_1^x \sin(\pi t^2) dt$. Из первого уравне-

ния и условия $y(0) = 0$ получаем $y(x) = \int_0^x z(s) ds = \int_0^x \int_1^s \sin(\pi t^2) dt ds$. Таким

образом, существует ровно одна функция $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая сформулированным условиям.

Пусть $G = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq 1, s \leq t \leq 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \nu(1) &= - \int_0^1 \int_s^1 \sin(\pi t^2) dt ds = - \iint_G \sin(\pi t^2) ds dt = - \int_0^1 \sin(\pi t^2) \int_0^t ds dt = \\ &= - \int_0^1 \sin(\pi t^2) t dt = - \frac{1}{\pi}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

10. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k^2-1)^2}{3^k}$?

◀ Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k^2-1)^2}{3^k} \bigg/ \frac{1}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^4}{(3/2)^k} = 0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n_0$

$\frac{(k^2-1)^2}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$ и потому $u_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$ при всех $n \geq n_0$. Так как гео-

метрический ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и

ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, а потому и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. ▶

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оленикова Ю.К. Задания и итоги всероссийской студенческой олимпиады по математике 2023 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 73–85.
2. Оленикова Ю.К. Анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 86–92.
3. Ройтенберг В.Ш. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учебное пособие. / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. 2-е изд., испр. и доп. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. 151 с.
4. Березина Л.В. Анализ результатов решения задач Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / Л.В. Березина, А.В. Васильева, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 52–57.
5. Васильева А.В. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / А.В. Васильева, Л.В. Березина, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 58–67.

УДК 004.8:519.2

Л. А. Сидорова

Ярославский государственный медицинский университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: sl_oleg_70@mail.ru

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ТЕСТОВ

Представленный материал – реальный поиск автором корректного и оптимального общения с чат-ботом ChatGPT. Целью автора было создание контролируемых тестов по математической статистике для нематематических и нетехнических специальностей вузов. Статья может быть полезна тем, кто так же, как и автор, желает использовать искусственный интеллект в своей деятельности.

Ключевые слова: искусственный интеллект, чат-бот ChatGPT, тест по математической статистике

L. A. Sidorova

Yaroslavl State Medical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: sl_oleg_70@mail.ru

EXPERIENCE OF USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE FOR CREATING TESTS

The presented material is the author's real search for correct and optimal communication with the ChatGPT. The author's goal was to create control tests on mathematical statistics for non-mathematical and non-technical specialties of universities. The article can be useful to anyone who, like the author, wants to use artificial intelligence in their activities.

Keywords: artificial intelligence, chatbot ChatGPT, math statistics test

1. Краткая справка о ChatGPT. ChatGPT (от английского *Generative Pretrained Transformer* – «генеративный предварительно обученный трансформер») – чат-бот с генеративным искусственным интеллектом, разработанный компанией OpenAI и способный работать в диалоговом режиме, поддерживающий запросы на естественных языках [1]. Система способна отвечать на вопросы, генерировать тексты на разных языках, включая русский, относящиеся к различным предметным областям. Первая версия ChatGPT появилась в 2018 году. Благодаря большой по-

пулярности система активно развивается, и в настоящее время действует уже пятая версия.

Автор узнала о существовании и возможностях ChatGPT, в частности о создании тестовых заданий в любом количестве и по любому учебному предмету как в открытой, так и в закрытой форме, на курсах повышения квалификации ЯГМУ. Информация эта была актуальной из-за недостатка учебной литературы по математической статистике для студентов для нематематических и нетехнических специальностей вузов.

В настоящее время в связи с санкциями пользование чатом напрямую невозможно. Для доступа к чату автором использовался телеграм-канал [2].

2. Работа с чат-ботом. В начале общения чат сообщил о своих умениях: 1. Писать и переводить тексты. 2. Создавать изображения. 3. Распознавать изображения с GPT-4. 4. Писать и редактировать код. 5. Создавать оригинальные песни. 6. Делать саммари из YouTube-видео.

Первые шаги общения оказались не очень удачными.

На запрос «Составь 5 задач на вычисление коэффициента корреляции» был получен ответ:

1. Найдите коэффициент корреляции между доходом и уровнем образования у опрошенных.

2. Рассчитайте коэффициент корреляции между количеством часов, проведенных за компьютером, и уровнем зрения у детей школьного возраста.

3. Определите коэффициент корреляции между количеством выпитого кофе и уровнем стресса у работников офиса.

4. Найдите коэффициент корреляции между уровнем физической активности и уровнем счастья у жителей крупных городов.

5. Рассчитайте коэффициент корреляции между количеством потребляемого алкоголя и уровнем агрессивности у подростков.

На второй запрос: «Добавь числовые данные к этим задачам» был получен следующий ответ:

1. Найдите коэффициент корреляции между доходом и уровнем образования у опрошенных.

Данные:

- Доход (в тысячах долларов): 40, 60, 30, 50, 70.

- Уровень образования (в баллах): 80, 90, 75, 85, 95.

2. Рассчитайте коэффициент корреляции между количеством часов, проведенных за компьютером, и уровнем зрения у детей школьного возраста.

Данные:

- Часы за компьютером (в неделю): 10, 15, 20, 8, 12.

- Уровень зрения (в диоптриях): -1.5, -2, -1, -2.5, -1.

3. Определите коэффициент корреляции между количеством выпитого кофе и уровнем стресса у работников офиса.

Данные:

- Количество выпитого кофе (в чашках в день): 3, 5, 2, 4, 6.

- Уровень стресса (в баллах): 70, 60, 75, 80, 65.

4. Найдите коэффициент корреляции между уровнем физической активности и уровнем счастья у жителей крупных городов.

Данные:

- Уровень физической активности (в часах в неделю): 5, 8, 3, 6, 7.

- Уровень счастья (в баллах): 85, 90, 80, 88, 87.

5. Рассчитайте коэффициент корреляции между количеством потребляемого алкоголя и уровнем агрессивности у подростков.

Данные:

- Количество потребляемого алкоголя (в неделю, в литрах): 1.5, 2, 1, 3, 2.5.

- Уровень агрессивности (в баллах): 70, 65, 75, 80, 72.

На запрос: «Составь 10 заданий закрытого типа по дисциплине "Математическая статистика" с одним правильным ответом» был дан ответ:

1. Как называется среднее значение случайной величины в математической статистике?

2. Какое распределение используется для оценки вероятности успеха в бинарном эксперименте?

3. Что такое дисперсия случайной величины?

4. Как называется метод оценки параметров распределения по выборке?

5. Какой статистический критерий используется для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух выборок?

6. Что такое выборочное среднее и как оно связано с математическим ожиданием?

7. Как называется распределение, которое описывает количество успехов в серии независимых испытаний?

8. Какой метод используется для построения доверительного интервала для среднего значения выборки?

9. Что такое корреляция между двумя случайными величинами?

10. Как вычисляется стандартная ошибка среднего значения выборки?

А на запрос «где ответы?», было получено следующее сообщение:

1. Среднее значение случайной величины называется математическим ожиданием.

2. Для оценки вероятности успеха в бинарном эксперименте используется биномиальное распределение.

3. Дисперсия случайной величины - это мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.

4. Метод оценки параметров распределения по выборке называется метод максимального правдоподобия.

5. Для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух выборок используется t-критерий Стьюдента.

6. Выборочное среднее – это среднее значение выборки, которое является оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

7. Распределение, которое описывает количество успехов в серии независимых испытаний, называется биномиальным распределением.

8. Для построения доверительного интервала для среднего значения выборки используется метод стандартной ошибки.

9. Корреляция между двумя случайными величинами – это мера степени линейной взаимосвязи между ними.

10. Стандартная ошибка среднего значения выборки вычисляется как отношение стандартного отклонения квадратного корня из размера выборки.

На следующий запрос: «Составь 10 заданий закрытого типа по дисциплине "Математическая статистика" с двумя правильными ответами» чат выдал:

1. Что называется методом оценки параметров распределения по выборке?

- Метод максимального правдоподобия.
- Метод наименьших квадратов.

2. Что используется для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух выборок?

- t-критерий Стьюдента.
- Z-критерий.

3. Что является оценкой для математического ожидания генеральной совокупности?

- Выборочное среднее.
- Медиана.

4. Как называется распределение, которое описывает количество успехов в серии независимых испытаний?

- Биномиальное распределение.
- Пуассоновское распределение.

5. Как вычисляется стандартная ошибка среднего значения выборки?

- Как отношение стандартного отклонения квадратного корня из размера выборки.

- Как отношение стандартного отклонения к размеру выборки.

6. Что является мерой разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания?

- Дисперсия.

- Среднеквадратическое отклонение.

7. Что называется математическим ожиданием случайной величины?

- Среднее значение случайной величины.

- Медиана случайной величины.

8. Как называется распределение, описывающее вероятность успеха в бинарном эксперименте?

- Биномиальное распределение.

- Нормальное распределение.

9. Что является мерой степени линейной взаимосвязи между двумя случайными величинами?

- Корреляция.

- Ковариация.

10. Что используется для построения доверительного интервала для среднего значения выборки?

- Метод стандартной ошибки.

- Метод доверительных интервалов.

При этом на запрос «А где выбор правильного ответа из нескольких предложенных вариантов?» был получен ответ: Простите за путаницу. Вот правильные ответы на вопросы:

1. Что называется методом оценки параметров распределения по выборке?

- Метод максимального правдоподобия.

2. Что используется для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух выборок?

- t-критерий Стьюдента.

3. Что является оценкой для математического ожидания генеральной совокупности?

- Выборочное среднее.

4. Как называется распределение, которое описывает количество успехов в серии независимых испытаний?

- Биномиальное распределение.

5. Как вычисляется стандартная ошибка среднего значения выборки?

- Как отношение стандартного отклонения квадратного корня из размера выборки.

6. Что является мерой разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания?

- Дисперсия.

7. Что называется математическим ожиданием случайной величины?

- Среднее значение случайной величины.

8. Как называется распределение, описывающее вероятность успеха в бинарном эксперименте?

- Биномиальное распределение.

9. Что является мерой степени линейной взаимосвязи между двумя случайными величинами?

- Корреляция.

10. Что используется для построения доверительного интервала для среднего значения выборки?

- Метод стандартной ошибки».

После довольно длительного общения и анализа ошибок стало понятно, что запрос правильнее сформулировать следующим образом: «Составь 10 заданий закрытого типа по дисциплине "Математическая статистика" с тремя вариантами ответов, среди которых только один правильный».

И был получен ответ:

Задание 1. Какое из следующих утверждений верно для среднего арифметического выборки? 1. Среднее арифметическое всегда больше медианы. 2. Среднее арифметическое может быть меньше, равно или больше медианы. 3. Среднее арифметическое всегда равно моде.

Правильный ответ: 2.

Задание 2. Какое распределение используется для моделирования количества событий, происходящих в фиксированном интервале времени? 1. Нормальное распределение. 2. Распределение Пуассона. 3. Экспоненциальное распределение.

Правильный ответ: 2

Задание 3. Какой метод используется для оценки параметров распределения на основе выборочных данных? 1. Дисперсия. 2. Оценка максимального правдоподобия. 3. Корреляционный анализ.

Правильный ответ: 2

Задание 4. Какой из следующих показателей является мерой разброса данных? 1. Мода. 2. Среднее арифметическое. 3. Дисперсия.

Правильный ответ: 3

Задание 5. Что такое уровень значимости в гипотезах? 1. Вероятность ошибки первого рода. 2. Вероятность ошибки второго рода. 3. Вероятность того, что гипотеза верна.

Правильный ответ: 1

Задание 6. Какой тест используется для проверки равенства средних двух независимых выборок? 1. Тест Стьюдента. 2. Тест χ^2 (хи-квадрат). 3. ANOVA.

Правильный ответ: 1

Задание 7. Какое из следующих распределений является симметричным? 1. Нормальное распределение. 2. Логнормальное распределение.

3. Распределение Коши. *Правильный ответ:* 1.

Задание 8. Какой из следующих показателей не является мерой центральной тенденции? 1. Мода. 2. Медиана. 3. Стандартное отклонение.

Правильный ответ: 3.

Задание 9. Что такое доверительный интервал? 1. Интервал, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение параметра. 2. Интервал, в котором находятся все наблюдаемые значения выборки. 3. Интервал, который показывает разброс данных.

Правильный ответ: 1.

Задание 10. Какой метод используется для проверки независимости двух категориальных переменных? 1. Тест Стьюдента. 2. Тест χ^2 (хи-квадрат). 3. Регрессионный анализ.

Правильный ответ: 2.

Наконец цель была достигнута. Такие задания вполне могут проверить знания студентов в области математической статистики, понимание ключевых понятий и методов.

Заключение. 1. При использовании ChatGPT можно составлять тесты на любые темы гораздо более высокого качества, чем многие тесты, выставленные дилетантами, которыми изобилует интернет. Ошибки не исключены и зависят зачастую от некорректной или неправильной постановки вопроса пользователем.

2. Удобство использования нейросети ChatGPT заключается и в том, что она бесплатна во всех странах мира [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ChatGPT // Wikipedi: [сайт]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/ChatGPT>
2. Telegram: Contact @GPT4Telegrambot. URL: <https://t.me/GPT4Telegrambot>
3. Что такое YandexGPT3? // Yandex: [сайт]. URL: https://yandex.ru/search/?text=chatgpt&clid=2163430&search_source=dzen_desktop_safe&src=suggest_B&lr=16

УДК 004.4'24

М. О. Смирнов, В. К. Маевский

СОВРЕМЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ DEVOPS-ИНЖЕНЕРА

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: smirnoffmatvej@gmail.com,
maevskiyvk@edu.ystu.ru

Рассматривается инструментарий DevOps-инженера, который объединяет процесс разработки и эксплуатации ПО, тем самым обеспечивая тесное взаимодействие между разработчиками ПО и инженерами инфраструктуры.

Ключевые слова: DevOps, инструментарий, автоматизация, процессы разработки программного обеспечения

М. О. Smirnov, V. K. Mayevsky

MODERN DEVOPS ENGINEER'S TOOLKIT

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: smirnoffmatvej@gmail.com,
maevskiyvk@edu.ystu.ru

The DevOps engineer's toolkit is considered, which combines the process of software development and operation, thereby ensuring close interaction between software developers and infrastructure engineers.

Keywords: DevOps, tools, automation, software development processes

Направление DevOps (в переводе с английского разработка и эксплуатация) представляет собой методологию автоматизации технологических процессов сборки, интеграцию процессов разработки и эксплуатации программного обеспечения [1]. В основные принципы методологии DevOps заложены: автоматизация, непрерывная интеграция и доставка ПО (процесс CI/CD), мониторинг инфраструктуры и обеспечение безопасности хранения и передачи данных. В современном мире разработки программного обеспечения инженеры DevOps играют ключевую роль в успешной реализации этого принципа.

Инструментарий DevOps-инженера очень обширен. Ему необходимо знать и уметь использовать такие инструменты, как инструменты управления версиями и совместной разработки, в них входит Git, Collaboration Tools.

Git остаётся на данный момент основной ведущей системой контроля версий, благодаря своей гибкости и поддержке распределенных команд, а платформы, такие как GitHub и GitLab, дополняют её возможности как над совместной работой, так и надо процессами CI/CD [2].

Collaboration Tools входят инструменты для управления проектами, например, такие как Jira, Trello, из российских аналогов Advanta, YouGile и т.д. Данные инструменты тесно интегрируются с системами контроля версий и предоставляют единую среду для совместной работы команды.

В инструменты DevOps-инженера также входят платформы для автоматизации сборки и тестирования из популярных решений GitLab CI/CD, Jenkins.

GitLab CI/CD встроен в веб-платформу GitLab, он позволяет полностью управлять полным жизненным циклом разработки ПО для всех репозиторий хранящихся внутри Gitlab.

Jenkins является одним из популярных решений для CI/CD. Он написана языке программирования Java, высоко настраивается и выполняет весь спектр задач по работе с автоматизацией сборки.

Управление инфраструктурой как кодом (IaC) одна из наиболее частых задач у DevOps-инженеров. Необходимо уметь пользоваться такими инструментами, как Terraform, Ansible.

Terraform используется для автоматизации разворачивания инфраструктуры среди облачных решений, поддерживает множество различных облачных провайдеров.

Ansible также используется для автоматизации конфигурации и развертывания на основе декларативного подхода. Один из основных преимуществ Ansible – это использование идиоматичности, то есть свойства объекта при повторном применении получить тот же результат, что и в первом, данное свойство позволяет изменять только те участки инфраструктуры, в котором произошли изменения, следовательно, это позволяет быстрее управлять инфраструктуру на серверах.

Основные инструменты, с которыми сталкивается DevOps-инженер, – это инструменты контейнеризации и оркестрации. Основные платформы – это Docker и Kubernetes.

Docker позволяет контейнеризировать приложения в изолированную среду, создавать унифицированные контейнеры, с которыми можно взаимодействовать, а также легко встраивать в CI/CD процессы [3].

Kubernetes является лидером в инструментах оркестрации контейнеров. Используется для обеспечения масштабируемости, управления кластерами[4].

Для обеспечения отказоустойчивости и доступности систем, необходимо использоваться мониторинг и логирование. Здесь используются такие инструменты, как Prometheus и Grafana, ELK Stack.

Prometheus и Grafana позволяют получать различную информацию по работе системы и визуализировать её в удобном для инженера виде.

ELKStack включает в себя сразу три инструмента (Elasticsearch, Logstash, Kibana). Elasticsearch является мощной NoSQL-базой данных, позволяющей использовать полнотекстовый поиск при работе с ней. Logstash используется для сбора, хранения и обработки информации, которую присылает Elasticsearch. Kibana визуализирует обработанную информацию в удобном для инженера интерфейсе.

Для обеспечения безопасности используется инструмент под названием Vault. Vault позволяет хранить секреты, токены, пароли в безопасном виде, чтобы при утечке данных конфиденциальная информация не попала в руки злоумышленников [5].

Инженеру DevOps необходимы знания в различных областях, например, таких как работа с сетью, безопасностью, контейнеризацией. С помощью такого специалиста можно сократить затраты времени на разработку продукта, повысить качество разработки и сделать инфраструктуру безопасной, быстрой и качественной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Humble J. Continuous Delivery: Reliable Software Delivery through Build, Test, and Deployment Automation* / Jez Humble, David Farley. Addison-Wesley, 2010. 512 p.
2. Официальная документация Git. URL: <https://git-scm.com>
3. Официальная документация Docker. URL: <https://docs.docker.com/>
4. Официальная документация Kubernetes. URL: <https://kubernetes.io>
5. *The DevOps Handbook: How to Create World-Class Agility, Reliability and Security in Technology Organizations* / Gene Kim, Patrick Debois, John Willis, Jez Humble. IT Revolution Press, 2016. 480 p.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.6

А. В. Васильева, Е. М. Булин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: vasileva@rsatu.ru, boolean.egor@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПОТОКА В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ ТРУБОПРОВОДНОМ КАНАЛЕ С ЦЕЛЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА МЕСТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В статье представлены результаты численного моделирования течения жидкости и газа по внезапно расширяющемуся трубопроводному каналу с целью нахождения коэффициента местного сопротивления. Представлены результаты исследования зависимости коэффициента местного сопротивления от скорости потока. Численное моделирование осуществляется в программном пакете Ansys CFX, используемом для моделирования и анализа поведения жидкостей и газов в технических системах.

Ключевые слова: численное моделирование, коэффициент местного сопротивления, сечение канала, скорость потока

A. V. Vasileva, E. M. Bulin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vasileva@rsatu.ru, boolean.egor@yandex.ru

NUMERICAL SIMULATION OF THE FLOW IN AN EXPANDING PIPELINE CHANNEL IN ORDER TO DETERMINE THE COEFFICIENT OF LOCAL RESISTANCE

The article presents the results of numerical simulation of the flow of liquid and gas through a suddenly expanding pipeline channel in order to find the coefficient of local resistance. The results of a study of the dependence of the coefficient of local resistance on the flow velocity are presented. Numerical modeling is carried out in the Ansys CFX software package, used for modeling and analyzing the behavior of liquids and gases in technical systems.

Keywords: numerical simulation, local resistance coefficient, channel cross section, flow velocity

Одним из актуальных вопросов гидрогазодинамики трубопроводных систем различных энергетических установок является расчет гидравлических потерь [1]. Местные потери напора – это потери, обусловленные местными гидравлическими сопротивлениями, то есть такими элементами трубопроводов, в которых вследствие изменения поперечных размеров или конфигурации происходит деформация потока. Всякая перестройка структуры потока связана с появлением дополнительных касательных напряжений, причиной которых являются возникающие в потоке дополнительные вихреобразования. Местные потери энергии имеют ту же физическую природу, что и потери по длине – это результат преобразования части механической энергии в тепловую за счет преодоления касательных напряжений трения.

На практике часто необходимо рассчитать местные потери давления и коэффициент местного сопротивления, или коэффициент потерь ξ (КМС). Коэффициент местного сопротивления зависит от формы сопротивления и его геометрических размеров, шероховатости внутренней поверхности сопротивления и режима движения. Интерес данного исследования представляет установление зависимости КМС от скорости течений жидкости или газа для внезапно расширяющегося трубопроводного канала.

Известно, что для каждого вида сопротивлений зависимости для определения коэффициента местного сопротивления свои. Так, например, в случае внезапного расширения трубы коэффициент рассчитывают по формуле

$$\xi = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2, \quad (1)$$

где S_1 – площадь сечения до расширения; S_2 – площадь сечения после расширения.

Если при этом сечение трубопровода имеет форму окружности, то формула (1) примет вид

$$\xi = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2, \quad (2)$$

где d_1 – диаметр сечения до расширения; d_2 – диаметр сечения после расширения.

Для круглого трубопровода с диаметром канала до расширения 40 мм и после расширения 80 мм из (2) получаем

$$\xi_{теор} = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{40}{80} \right)^2 \right]^2 = 0,5625.$$

Возможности аналитической зависимости ограничены и не дают нам представления об изменении значения коэффициента по сечению канала. Эту проблему можно решить методами численного моделирования, позволяющими с помощью специальных программ, методами конечно-элементного анализа находить значение неизвестных параметров процесса в каждой точке системы. В основу численного расчета коэффициента положим эмпирическую формулу Вейсбаха для расчета местных потерь давления:

$$\Delta p = \xi \frac{\rho v^2}{2}, \quad (3)$$

где Δp – местные потери давления; ρ – плотность жидкости или газа; v – скорость вещества перед местным сопротивлением.

Выразим из (3) коэффициент местного сопротивления и будем применять его в численном моделировании:

$$\xi = \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho v^2}. \quad (4)$$

Проведем также исследование зависимости КМС от скорости течений в трубопроводе. Выберем диаметр канала до расширения 40 мм, после 80 мм. Длина узкой части трубопровода 120 мм, широкой 240 мм.

Численное моделирование осуществляется в программном пакете Ansys CFX, используемом для моделирования и анализа поведения жидкостей и газов в технических системах [2]. Для проведения расчета необходимо: подготовить геометрию трубопровода, создать поверхностную сетку геометрии, задать граничные условия расчета.

Подготовка геометрии осуществлялась в САПР «КОМПАС-3D» [3]. Трубопровод представляет собой тело вращения. Был создан эскиз (рис. 1) и провернут вокруг осевой (рис. 2).

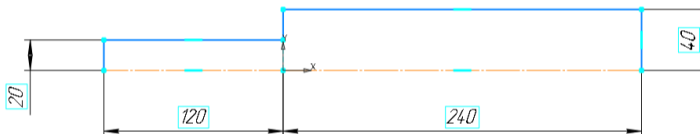


Рис. 1. Эскиз трубопровода

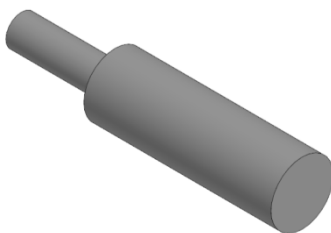


Рис. 2. Геометрия трубопровода

Для дальнейшей работы необходимо сохранить геометрию в формате STEP (.stp) или Parasolid (.x_t).

Построение сетки является неотъемлемой частью методов компьютерного моделирования, таких как метод конечных элементов (МКЭ) и вычислительная гидродинамика (CFD). Поверхностные сетки дискретизируют непрерывное геометрическое пространство на математически определенные формы. Эта дискретизация позволяет компьютерам численно решать управляющие уравнения и моделировать физические явления и процессы. Качество сетки – это безразмерный коэффициент, показывающий, насколько каждый ее элемент по форме близок к идеальной форме. Оно влияет на точность, сходимость и скорость процесса моделирования. Он варьируется от 0 до 1. Приемлемым является значение выше 0,15.

Программное обеспечение ICEM CFD нацелено на создание структурированных сеток высокого качества [4]. Была построена блочная структурированная сетка с минимальным качеством элементов 0,7 и количеством 4218716. Эти значения являются приемлемыми.

ICEM CFD позволяет описать регионы геометрии. Был задан вход (Inlet) на узком канале и выход (Outlet) на широком канале трубопровода.

Загрузим сетку в программный пакет Ansys CFX. Данное программное обеспечение позволяет задать граничные условия. Во вкладке “DefaultDomain” можно задать вещество, проходящее через трубопровод. В нашем расчете будут использованы воздух при 25 °C и вода.

В расчете используется модель турбулентности $k - \varepsilon$. Эта модель является наиболее широко используемой и проверенной моделью турбулентности для различных применений – от промышленных до экологических потоков, что объясняет ее популярность.

На вход была задана скорость потока перед препятствием. Будет проведен расчет для разных значений скорости. На выход задано атмосферное давление 101325 Па. Вкладка «Functioncalculator» позволяет вычислить значения газодинамических функций в любой области трубопровода. Выберем области входа и выхода. Программный пакет Ansys CFX

позволяет представить результаты расчета в виде контуров, линий тока, графиков или таблиц.

Приведем пример для начальной скорости 5 м/с. Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Расчет течения воздуха в трубе с внезапным расширением

Скорость перед сопротивлением, м/с	1	5	10	15	20
Давление на входе, Па	101336	101362	101407	101467	101551
Давление на выходе, Па	101328	101330	101335	101340	101355
КМС	0,543	0,543	0,543	0,542	0,539

Таблица 2. Расчет течения воды в трубе с внезапным расширением

Скорость перед сопротивлением, м/с	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
Давление на входе, Па	101325,7	101328,8	101333,3	101339	101347
Давление на выходе, Па	101325	101326	101327	101328	101330
КМС	0,56	0,56	0,56	0,55	0,544

Построим графики зависимостей коэффициента местного сопротивления от скорости течения жидкости и газа (рис. 3 и 4).

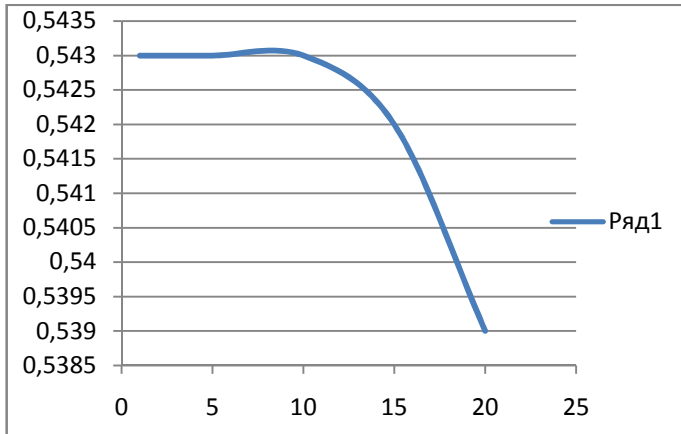


Рис. 3. Зависимость КМС от скорости течения воздуха

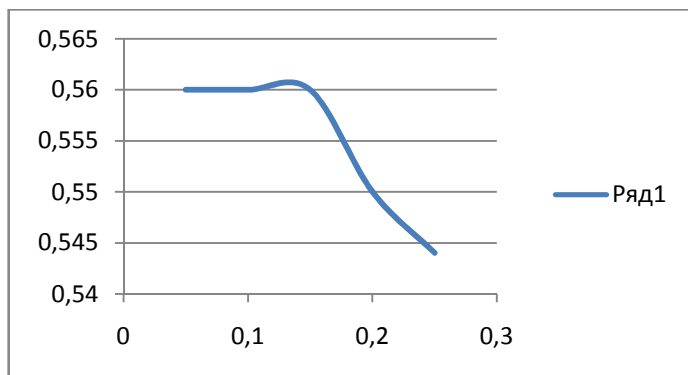


Рис. 4. Зависимость КМС от скорости течения воды

Из расчета видно, что с некоторого значения скорости потока значения КМС начинают снижаться, причем для воды эти изменения более наглядны. Для предотвращения аварийных ситуаций и обеспечения безопасной работы трубопроводов необходимо знать параметры и процессы, проходящие в них. Поэтому исследование местного сопротивления трубопроводов является важным направлением в гидравлике и гидрогазодинамике. Применение численного моделирования к исследованию гидродинамических процессов является актуальным и ставит своей целью повышение эффективности и надежности работы трубопроводных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лысенко В.С. Технология снижения гидравлических потерь в напорных трубопроводах // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 3. С. 59-61.
2. ANSYS CFD // Гидравлика [сайт]. URL: https://techgidravlika.net/view_post.php?id=60 (дата обращения: 01.03.2024).
3. Знакомство // КОМПАС-3D: [сайт]. URL: <https://kompas.ru/kompas-3d/about/> (дата обращения: 01.03.2024).
4. ANSYS ICEM CFD // CAE Expert: [сайт]. URL: <https://cae-expert.ru/product/ansys-icem-cfd> (дата обращения: 01.03.2024).

УДК 51-74

А. В. Гусаров

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: alvgus@mail.ru

К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

В статье рассматриваются математическая модель цифровой системы стабилизации мощности электронного луча в установке для электронно-лучевого нанесения тонких пленок. Система стабилизации обеспечивает компенсацию отклонения электронного луча от заданного положения вследствие изменения формы катода испарителя. Рассмотрена особенность моделирования цифровой системы стабилизации.

Ключевые слова: математическая модель, разностные уравнения, цифровая система стабилизации, переходный процесс

A. V. Gusarov

P.A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology
Russia, Rybinsk, e-mail: alvgus@mail.ru

ON THE ISSUE OF MODELING A DIGITAL STABILIZATION SYSTEM

The article examines a mathematical model of a digital system for stabilizing the power of an electron beam in an electron beam thin film deposition installation. The stabilization system provides compensation for the deviation of the electron beam from the specified position due to a change in the shape of the evaporator cathode. The feature of modeling a digital stabilization system is considered.

Keywords: mathematical model, difference equations, digital stabilization system, transient process

Для улучшения качества процесса нанесения тонких пленок методом электроннолучевого испарения из водоохлаждаемого тигля в РГАТУ имени П.А. Соловьева была разработана система регулирования положения электронного луча с датчиком отраженных электронов [1, 2]. Для компенсации помех, связанных с изменением формы катода вследствие его нагрева, разработана система стабилизации мощности, передаваемой в испаритель.

При разработке системы стабилизации проводилось ее моделирование на ЭВМ с использованием разностных уравнений. Известно, что система стабилизации [3] предназначена для компенсации помех $\xi(t)$, поэтому ее структурная схема должна иметь вид, изображенный на рис. 1.

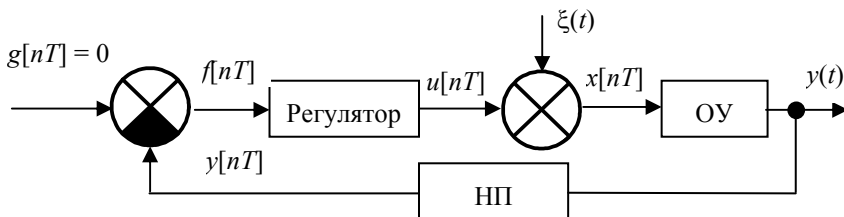


Рис. 1. Классическая структурная схема системы стабилизации

Однако такая структурная схема не учитывает тот факт, что помеха $\xi(t)$ поступает на вход объекта непрерывно. Если бы система стабилизации была непрерывной, то структурная схема соответствовала бы процессу управления.

Цифровая система стабилизации функционирует в дискретном времени nT , где T – период дискретизации, s , а n – номер периода в виде бесконечной последовательности целых положительных чисел, начиная с нуля [3]. Поэтому сигнал с выхода цифрового регулятора и помеха должны подаваться на разные входы объекта управления. В виде структурной схемы это реализовано на рис. 2.

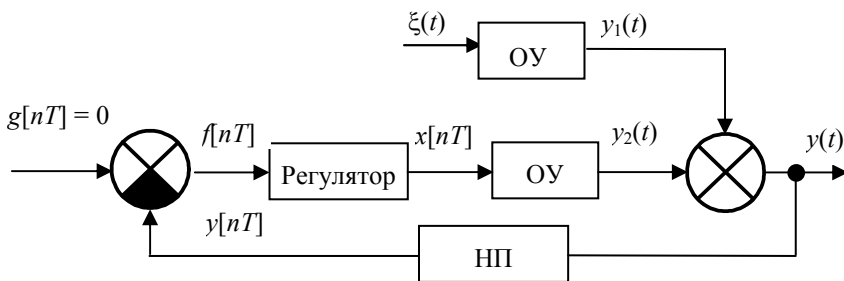


Рис. 2. Структурная схема системы стабилизации, используемая при моделировании

Объект управления (ОУ) представляет собой электромагнитную систему отклонения электронного луча и тигель испарителя. Положение фокального пятна электронного луча в виде координаты $y(t)$ преобразуется нормирующим преобразователем в значение $y[nT]$ в диапазоне от -1 до 1

[1, 2]. Квадратные скобки $[nT]$ означают, что значения являются дискретными и определены только в дискретные моменты времени nT . Круглые скобки (t) означают, что значение является непрерывным и определено в любой момент времени (t) , в том числе и в дискретные моменты времени $[nT]$.

При моделировании системы стабилизации выходной сигнал $y(t)$ формируется как сумма реакции непрерывного объекта на помеху (сигнал $y_1(t)$) и реакции дискретной модели непрерывного объекта на выходной сигнал цифрового регулятора (сигнал $y_2(t)$).

Передающую функцию рассматриваемого объекта управления можно записать в виде

$$W_{Oy}(p) = \frac{k_{Oy}}{p \cdot (p + a)}, \quad (1)$$

где k_{Oy} – коэффициент передачи объекта управления, В/Вт;

a – постоянная времени объекта управления, 1/с.

Цифровой регулятор представляет собой дискретный аналог форсирующего звена с передаточной функцией

$$W_p(p) = k_d \cdot (\tau_d \cdot p + 1), \quad (2)$$

где k_d – коэффициент передачи звена, В; τ_d – постоянная времени звена, с.

Выражение для дискретной передаточной функции цифрового регулятора $W_p(z)$ имеет вид [2]:

$$W_p(z) = \left(\frac{k_d + \tau_d}{T} + k_d + \tau_d \right) \cdot z^0 - \left(\frac{k_d + \tau_d}{T} \right) \cdot z^{-1} = \mu_0 \cdot z^0 + \mu_1 \cdot z^{-1}. \quad (3)$$

На входе цифрового регулятора обычно находится аналого-цифровой преобразователь с передаточной функцией h_1 , а на выходе – цифро-аналоговый преобразователь с передаточной функцией h_2 , причем $h_1 = 2 \cdot h_2$. Поэтому выражение для выходного сигнала регулятора $X[nT]$ принимает вид [2]

$$X[nT] = 2 \cdot \mu_0 \cdot F[nT] + 2 \cdot \mu_1 \cdot F[(n-1)T], \quad (4)$$

где $F[nT] = f[nT]/h_1$ – входной сигнал регулятора в текущий момент дискретного времени, полученный после аналого-цифрового преобразования; $F[(n-1)T] = f[(n-1)T]/h_1$ – входной сигнал регулятора в предыдущий момент дискретного времени, полученный после аналого-цифрового преобразования.

Объект управления является непрерывным звеном, поэтому значение $X[nT]$ в цифровой форме должно быть преобразовано в значение в аналоговой форме $x[nT]$ в соответствии с выражением

$$x[nT] = h_2 \cdot X[nT]. \quad (5)$$

где h_2 – передаточная функция ЦАП, В.

Объект управления представляет собой непрерывное звено, поэтому для моделирования его «поведения» в составе дискретной системы регулирования необходимо получить передаточную функцию $W_{\text{OY}}(z)$, представив ее в каноническом виде

$$W_{\text{OY}}(z) = \frac{\sum_{i=1}^K \psi_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^L \varphi_j \cdot z^{-j}}. \quad (6)$$

На выходе цифрового регулятора присутствует экстраполятор нулевого порядка, запаздывание существенно меньше периода дискретизации, поэтому для получения выражения $W_{\text{OY}}(z)$ в каноническом виде воспользуемся выражением [3]

$$W_{\text{OY}}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ L^{-1} \left(\frac{W_{\text{OY}}(p)}{p} \right) \right\}, \quad (7)$$

где Z – оператор дискретного z -преобразования;

L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа.

Выполнив в выражении (7) преобразования, получим, что

$$W_{\text{OY}}(z) = \frac{\varphi_1 \cdot z^{-1} + \varphi_2 \cdot z^{-2}}{1 + \psi_1 \cdot z^{-1} + \psi_2 \cdot z^{-2}}. \quad (8)$$

Выражение (8) представлено в каноническом виде, отсюда легко получить выражение для $y_2[nT]$, которое моделирует работу «цифровой» части объекта управления под действием сигнала с выхода цифрового регулятора:

$$y_2[nT] = \varphi_1 \cdot x[(n-1)T] + \varphi_1 \cdot x[(n-2)T] - (\psi_1 \cdot y[(n-1)T] + \psi_2 \cdot y[(n-2)T]). \quad (9)$$

Для моделирования воздействия помехи на объект управления из выражений получим выражение для $y_1[nT]$:

$$y_1[nT] = 1 - e^{\theta \cdot t} \cdot \sqrt{\rho^2 + 1} \cdot \sin(\omega_{\text{CB}} \cdot t + \varphi_0), \quad (10)$$

В выражение (10) подставляются значения t в дискретные моменты времени $[nT]$. После подстановки полученных в результате экспериментов значений в выражения (10) и (11), а также выбранного значения $T = 6$ мс, получим, что

$$y[nT] = 1 - 5,567 \cdot e^{-25t} \cdot \sin(4,564 \cdot t + 0,18) + 0,272 \cdot x[(n-1)T] + 0,0246 \cdot x[(n-2)T] + 1,7408 \cdot y[(n-1)T] - 0,7408 \cdot y[(n-2)T]. \quad (11)$$

Для моделирования будем использовать выражения (4), (5), (9) и (11), а также выражения (см. рис. 1 и 2)

$$f[nT] = -y[nT], \quad (12)$$

$$F[nT] = 100 \cdot f[nT]. \quad (13)$$

Расчеты выполняются в следующем порядке:

- обнуляются все текущие и предыдущие значения $f[nT]$, $F[nT]$, $x[nT]$, $X[nT]$, $y_1[nT]$, $y_2[nT]$, $y[nT]$, а n и $g[nT]$ присваивается значение 0;
- вычисляется значение $y[nT]$ по выражению (11);
- вычисляется значение $f[nT]$ по выражению (12);
- вычисляется значение $F[nT]$ по выражению (12) и округляется до ближайшего целого числа;
- вычисляется значение $X[nT]$ по выражению (4) и приводится к диапазону выходных значений ЦАП на выходе регулятора;
- вычисляется значение $x[nT]$ по выражению (5).

Далее процесс вычисления повторяется в точке $n = 1$ и т. д. Для расчета можно задать несколько десятков точек, но целесообразно сначала выполнить предварительный расчет длительности переходного процесса $t_{\text{пер}}$ в предположении, что

$$t_{\text{пер}} = 3 \cdot \tau, \quad (14)$$

где τ – постоянная времени объекта управления, для рассматриваемого объекта $\tau = 20$ мс = 0,02 с.

После несложных вычислений можно получить, что расчет нужно проводить для времени в диапазоне от 0 до 60 мс, что при $T = 6$ мс соответствует 10 периодам дискретизации.

После получения расчетных данных оказалось, что переходный процесс при воздействии единичной помехи $\xi(t)$ заканчивается при достижении времени 0,16 с (рис. 3 и 4).

Результаты экспериментов показали правильность выбора параметров математической модели.

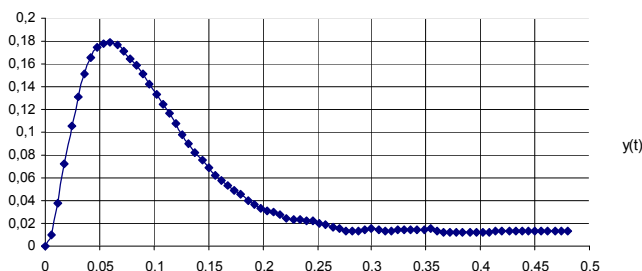


Рис. 3. Зависимость выходного сигнала $y(t)$ от времени t при воздействии положительной единичной помехи $\xi(t)$

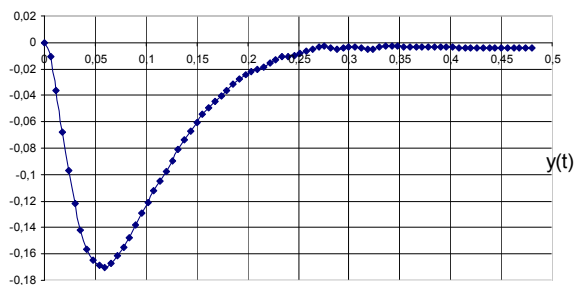


Рис. 4. Зависимость выходного сигнала $y(t)$ от времени t при воздействии отрицательной единичной помехи $\xi(t)$

В процессе математического моделирования системы стабилизации мощности электронного луча были получены результаты, позволяющие осуществить практическую реализацию системы в виде аппаратной и программной части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусаров А.В. Математическое моделирование датчика положения электронного луча // Неделя науки – 2023. Материалы Всероссийской научно-практической конференции (г. Сибай, Республика Башкортостан, 6–7 апреля 2023 г.). Сибай: Сибайский институт (филиал) УУНиТ, 2023. С. 217–220.
2. Гусаров А.В. Математическая модель системы регулирования положения электронного луча // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 129–134.
3. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, Гл. редакция физико-математической литературы, 1976. 576 с.

УДК 519.6

А. Н. Жаров, И. Г. Минеичева

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: anzharov@mail.ru, igzharova@mail.ru

О ФОРМИРОВАНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ ПЛОСКИХ РАМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Излагается метод конечных элементов для расчета плоских стержневых систем. Демонстрируется методика сборки глобальной матрицы жесткости с помощью матриц сборки. Показано, что использование матриц сборки позволяет избежать рутинной ручной работы при формировании глобальной матрицы жесткости.

Ключевые слова: метод конечных элементов, матрица жесткости, плоские стержневые системы, плоские рамы

A. N. Zharov, I. G. Mineicheva

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: anzharov@mail.ru, igzharova@mail.ru

ON THE FORMATION OF A GLOBAL STIFFNESS MATRIX IN THE CALCULATION OF FLAT FRAMES BY THE FINITE ELEMENT METHOD

We present the finite element method for calculating plane rod systems. The technique for assembling the global stiffness matrix using assembly matrices is demonstrated. We show that the use of assembly matrices allows avoiding routine manual work when forming the global stiffness matrix.

Keywords: finite element method, stiffness matrix, flat beam systems, flat frames

Как известно, метод конечных элементов является весьма эффективным методом решения инженерных задач [1, 2]. В данной работе рассмотрим расчет плоских стержневых систем.

Пусть имеется некоторая плоская стержневая система. Типы конечных элементов, присутствующих в этой системе, изображены на рис. 1. Количество стержней в ней обозначим $N_{эл}$, количество узлов — $N_{уз}$. Рассмотрим стержневой элемент типа 1 с номером n , концы которого находятся в узлах i и j . Концы такого стержня считаем жестко заделанными.

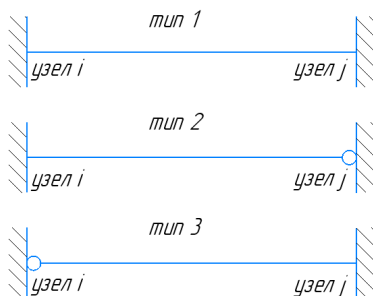


Рис. 1. Типы конечных элементов

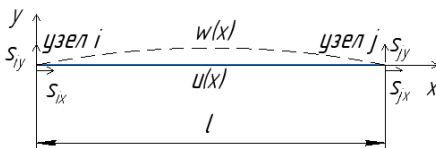


Рис. 2. Функции $u(x)$ и $w(x)$, описывающие форму конечного-элемента

Начало местной декартовой системы координат поместим в узел i . Ось x расположим вдоль оси стержня. Длину стержня примем равной l . В результате воздействия внешних нагрузок в узлах i и j могут появиться линейные $s_{ix}, s_{iy}, s_{jx}, s_{jy}$ и угловые ϑ_i, ϑ_j перемещения. Форму стержня будем описывать функциями $u(x)$ и $w(x)$ (рис. 2). Первая из которых $u(x)$ описывает сжатие или растяжение стержня, а вторая $w(x)$ изгиб.

$$u(x) = a_1 + a_2x;$$

$$w(x) = a_3 + a_4x + a_5x^2 + a_6x^3.$$

Граничные условия имеют вид:

при $x = 0$: $u(0) = s_{ix}$; $w(0) = s_{iy}$; $w'(0) = \vartheta_i$;

при $x = l$: $u(l) = s_{jx}$; $w(l) = s_{jy}$; $w'(l) = \vartheta_j$.

Используя граничные условия, функции $u(x)$ и $w(x)$ перепишем в виде

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)s_{ix} + \frac{x}{l}s_{jx};$$

$$w(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)s_{iy} + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\vartheta_i + \\ + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)s_{jy} + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\vartheta_j.$$

В узлах i и j возникают силы $r_{ix}, r_{iy}, r_{jx}, r_{jy}$ и моменты сил m_i, m_j .

Потенциальная энергия стержня W_Π определяется в виде суммы энергии деформации и изменения потенциальной энергии внешних сил

$$W_{\Pi} = \frac{EA}{2} \int_0^l (u'(x))^2 dx + \frac{EJ}{2} \int_0^l (w''(x))^2 dx - r_{ix}s_{ix} - r_{iy}s_{iy} - m_i\vartheta_i - \\ - r_{jx}s_{jx} - r_{jy}s_{jy} - m_j\vartheta_j,$$

где E - модуль упругости материала; A - площадью поперечного сечения; J - момент инерции поперечного сечения.

Подставляя в последнее выражение функции $u(x)$ и $w(x)$ найдем выражение для потенциальной энергии как функцию от перемещений и углов поворота

$$W_{\Pi} = \frac{EA}{l} \left(\frac{s_{ix}^2}{2} - s_{ix}s_{jx} + \frac{s_{jx}^2}{2} \right) + \frac{EJ}{l} \left(\frac{6}{l^2} s_{iy}^2 + \frac{6}{l} s_{iy}\vartheta_i - \frac{12}{l^2} s_{iy}s_{jy} + \right. \\ \left. + \frac{6}{l} s_{iy}\vartheta_j + 2\vartheta_i^2 - \frac{6}{l} \vartheta_i s_{jy} + 2\vartheta_i\vartheta_j + \frac{6}{l^2} s_{jy}^2 - \frac{6}{l} s_{jy}\vartheta_j + 2\vartheta_j^2 \right) - \\ - r_{ix}s_{ix} - r_{iy}s_{iy} - m_i\vartheta_i - r_{jx}s_{jx} - r_{jy}s_{jy} - m_j\vartheta_j.$$

Найдем частные производные от энергии по перемещениям и углам поворота

$$\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial s_{ix}} = \frac{EA}{l} s_{ix} - \frac{EA}{l} s_{jx} - r_{ix}; \\ \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial s_{iy}} = \frac{12EJ}{l^3} s_{iy} + \frac{6EJ}{l^2} \vartheta_i - \frac{12EJ}{l^3} s_{jy} + \frac{6EJ}{l^2} \vartheta_j - r_{iy}; \\ \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial \vartheta_i} = \frac{6EJ}{l^2} s_{iy} + \frac{4EJ}{l} \vartheta_i - \frac{6EJ}{l^2} s_{jy} + \frac{2EJ}{l} \vartheta_j - m_i; \\ \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial s_{jx}} = -\frac{EA}{l} s_{ix} + \frac{EA}{l} s_{jx} - r_{jx}; \\ \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial s_{jy}} = -\frac{12EJ}{l^3} s_{iy} - \frac{6EJ}{l^2} \vartheta_i + \frac{12EJ}{l^3} s_{jy} - \frac{6EJ}{l^2} \vartheta_j - r_{jy}; \\ \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial \vartheta_j} = \frac{6EJ}{l^2} s_{iy} + \frac{2EJ}{l} \vartheta_i - \frac{6EJ}{l^2} s_{jy} + \frac{4EJ}{l} \vartheta_j - m_j.$$

Приравнявая производные к нулю, получим матричное уравнение

$$K^{(n)} s_{ij}^{(n)} = r_{ij}^{(n)}, \quad (1)$$

где матрица жесткости $K^{(n)}$, матрица перемещений $s_{ij}^{(n)}$ и матрица усилий $r_{ij}^{(n)}$ определяются выражениями

$$K^{(n)} = \begin{pmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & 6EJ/l^2 & 2EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{pmatrix};$$

$$s_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} s_{ix} \\ s_{iy} \\ \vartheta_i \\ s_{jx} \\ s_{jy} \\ \vartheta_j \end{pmatrix}; \quad r_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ m_i \\ r_{jx} \\ r_{jy} \\ m_j \end{pmatrix}.$$

Уравнение (1) определяет связь между перемещениями и усилиями в локальной системе координат.

Для конечных элементов 2- и 3-го типа матрицы жесткости могут быть получены таким же способом, как и для элемента типа 1, с той лишь разницей, что в той точке, где расположен шарнир, $w'' = 0$. Эти матрицы имеют следующий вид:

тип 2

$$K^{(n)} = \begin{pmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 3EJ/l^3 & 3EJ/l^2 & 0 & -3EJ/l^3 & 0 \\ 0 & 3EJ/l^2 & 3EJ/l & 0 & -3EJ/l^2 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EJ/l^3 & -3EJ/l^2 & 0 & 3EJ/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тип 3

$$K^{(n)} = \begin{pmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 3EJ/l^3 & 0 & 0 & -3EJ/l^3 & 3EJ/l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EJ/l^3 & 0 & 0 & 3EJ/l^3 & -3EJ/l^2 \\ 0 & 3EJ/l^2 & 0 & 0 & -3EJ/l^2 & 3EJ/l \end{pmatrix}.$$

Если локальная система координат повернута относительно глобальной системы на угол α , то связь между перемещениями и усилиями в локальной и глобальной системах координат определяется соотношениями

$$S_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ \theta_1 \\ S_{2x} \\ S_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix} = T_n S_{ij}^{(n)} = T_n \begin{pmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ \vartheta_1 \\ S_{2x} \\ S_{2y} \\ \vartheta_2 \end{pmatrix};$$

$$R_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ M_1 \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ M_2 \end{pmatrix} = T_n r_{ij}^{(n)} = T_n \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ m_1 \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ m_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где матрица преобразования системы координат T_n определяется выражением

$$T_n = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица T_n является ортогональной. В связи с этим она удовлетворяет свойству $T_n^{-1} = T_n^{\text{TP}}$.

Используя (2), уравнение (1) можно переписать в виде

$$T_n K^{(n)} T_n^{\text{TP}} S_{ij}^{(n)} = R_{ij}^{(n)}. \quad (3)$$

Сформируем блочные матрицы сборки L_{ij} размера $3N_{y3} \times 6$:

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \dots & \dots \\ b_{N_{y3}1} & b_{N_{y3}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{N_{y3}1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{N_{y3}2} \end{pmatrix}^{\text{TP}}, \quad (4)$$

$$b_{i1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{j2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b_{k1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \neq i; \quad b_{k2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \neq j.$$

Введем матрицы $3N_{yz} \times 1$, содержащие перемещения и усилия для всех узлов:

$$S = \begin{pmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ \theta_1 \\ \dots \\ S_{N_{yz}x} \\ S_{N_{yz}y} \\ \theta_{N_{yz}} \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ M_1 \\ \dots \\ R_{N_{yz}x} \\ R_{N_{yz}y} \\ M_{N_{yz}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Перемещения $S_{ij}^{(n)}$, с учетом (5) и (4) можно записать в виде

$$S_{ij}^{(n)} = L_{ij}^{tp} S,$$

а уравнение (3) в виде

$$T_n K^{(n)} T_n^{tp} L_{ij}^{tp} S = R_{ij}^{(n)}. \quad (6)$$

Умножим уравнение (6) на L_{ij} и, суммируя по всем конечным элементам, найдем

$$\sum_{n=1}^{N_{эл}} L_{ij} T_n K^{(n)} T_n^{tp} L_{ij}^{tp} S = \sum_{n=1}^{N_{эл}} L_{ij} R_{ij}^{(n)} = R. \quad (7)$$

Уравнение (7) можно записать в виде

$$K S = R, \quad (8)$$

где K - глобальная матрица жесткости

$$K = \sum_{n=1}^{N_{эл}} L_{ij} T_n K^{(n)} T_n^{tp} L_{ij}^{tp}. \quad (9)$$

Выражение (9) позволяет вычислять глобальную матрицу жесткости с помощью программных средств в автоматизированном режиме. Уравнение (8) позволяет найти перемещения и усилия в узлах в глобальной системе координат.

Перемещения и усилия в узлах в локальной системе координат можно найти из соотношений

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(n)} &= T_n^{tp} S_{ij}^{(n)} = T_n^{tp} L_{ij}^{tp} S. \\ r_{ij}^{(n)} &= K^{(n)} S_{ij}^{(n)} = K^{(n)} T_n^{tp} L_{ij}^{tp} S. \end{aligned} \quad (10)$$

В качестве примера рассмотрим плоскую стержневую систему, изображенную на рис. 3.

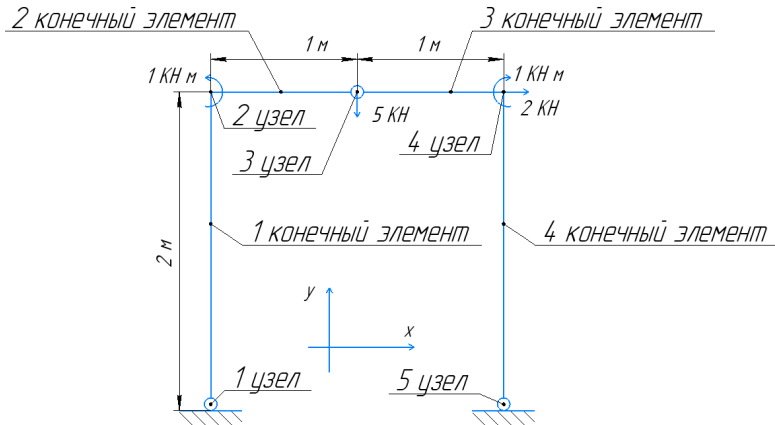


Рис. 3. Плоская рама с действующими на нее внешними нагрузками

Для расчета примем $EA = 12000 \text{ КПа} \cdot \text{м}^2$, $EJ = 90 \text{ КПа} \cdot \text{м}^4$.

Для конечных элементов, представленных на рис. 3, выпишем матрицы жесткости в локальной системе координат, матрицы сборки и углы поворота при переходе к глобальной системе координат и типы конечных элементов.

1-й конечный элемент имеет тип 3, угол поворота $\alpha = 90^\circ$:

$$L_{12} = \begin{pmatrix} 100000000000000 \\ 01000000000000 \\ 00100000000000 \\ 00010000000000 \\ 00001000000000 \\ 00000100000000 \end{pmatrix}^{\text{TP}} ;$$

$$K^{(1)} = \begin{pmatrix} 6000 & 0 & 0 & -6000 & 0 & 0 \\ 0 & 33,75 & 0 & 0 & -33,75 & 67,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6000 & 0 & 0 & 6000 & 0 & 0 \\ 0 & -33,75 & 0 & 0 & 33,75 & -67,5 \\ 0 & 67,5 & 0 & 0 & -67,5 & 135 \end{pmatrix}.$$

2-й конечный элемент имеет тип 2, угол поворота $\alpha = 0^0$:

$$L_{23} = \begin{pmatrix} 00010000000000 \\ 00001000000000 \\ 00000100000000 \\ 00000010000000 \\ 00000001000000 \\ 00000000100000 \end{pmatrix}^{\text{TP}} ;$$

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} 12000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 270 & 270 & 0 & -2700 & 0 \\ 0 & 270 & 270 & 0 & -2700 & 0 \\ -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 & 0 \\ 0 & -270 & -270 & 0 & 270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3-й конечный элемент имеет тип 3, угол поворота $\alpha = 0^0$:

$$L_{34} = \begin{pmatrix} 00000010000000 \\ 00000001000000 \\ 00000000100000 \\ 00000000010000 \\ 00000000001000 \\ 00000000000100 \end{pmatrix}^{\text{TP}} ;$$

$$K^{(3)} = \begin{pmatrix} 12000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 270 & 0 & 0 & -270 & 270 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 & 0 \\ 0 & -2700 & 0 & 270 & -270 & 0 \\ 0 & 270 & 0 & 0 & -270 & 270 \end{pmatrix}.$$

4-й конечный элемент имеет тип 2, угол поворота $\alpha = 270^0$:

$$L_{45} = \begin{pmatrix} 00000000010000 \\ 00000000001000 \\ 00000000000100 \\ 00000000000010 \\ 00000000000001 \\ 00000000000000 \end{pmatrix}^{\text{TP}} ;$$

$$K^{(4)} = \begin{pmatrix} 12000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 33,75 & 67,5 & 0 & -33,750 & 0 \\ 0 & 67,5 & 135 & 0 & -67,5 & 0 \\ -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 & 0 \\ 0 & -33,75 & -67,5 & 0 & 33,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Глобальную матрицу жесткости определим согласно (9):

$$K = L_{12}T_1K^{(1)}T_1^{\text{TP}}L_{12}^{\text{TP}} + L_{23}T_2K^{(2)}T_2^{\text{TP}}L_{23}^{\text{TP}} + L_{34}T_3K^{(3)}T_3^{\text{TP}}L_{34}^{\text{TP}} + \\ + L_{45}T_4K^{(4)}T_4^{\text{TP}}L_{45}^{\text{TP}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 33,75 & 0 & 0 & -33,75 & 0 & -67,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6000 & 0 & 0 & -6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -33,75 & 0 & 0 & 12033,75 & 0 & 67,5 & -12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60000 & 0 & 6270 & 270 & 0 & -2700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -67,5 & 0 & 0 & 67,5 & 270 & 405 & 0 & -2700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 24000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -270 & -270 & 0 & 540 & 0 & 0 & -270 & 270 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 12033,75 & 0 & 67,5 & -33,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2700 & 0 & 6270 & -270 & 0 & -60000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 270 & 0 & 67,5 & -270 & 405 & -67,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33,75 & 0 & -67,5 & 33,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6000 & 0 & 0 & 6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица перемещений и матрица усилий имеют вид

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ S_{2x}S_{2y}\theta_2S_{3x}S_{3y} \ 0 \ S_{4x}S_{4y}\theta_4 \ 0 \ 0 \ 0)^{\text{TP}};$$

$$R = (R_{1x}R_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -5 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1 \ R_{5x}R_{5y} \ 0)^{\text{TP}}.$$

Решив систему $KS = R$, найдем

$$S_{2x} = 0,045 \text{ м}; S_{2y} = -8,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \theta_2 = -0,019 \text{ рад};$$

$$S_{3x} = 0,045 \text{ м}; S_{3y} = -0,021 \text{ м};$$

$$S_{4x} = 0,045 \text{ м}; S_{4y} = -7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \theta_4 = 3,36 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$R_{1x} = -0,25 \text{ кН}; R_{1y} = 0,5 \text{ кН}; R_{5x} = -1,75 \text{ кН}; R_{5y} = 4,5 \text{ кН}.$$

Отметим, что рама, изображенная на рис. 3, является статически определимой. Найдем реакции опор с помощью уравнений статики. Для этого приравняем к нулю сумму проекций сил на оси координат и сумму моментов сил относительно 3-го узла

$$\begin{cases} R_{1x} + R_{5x} + 2 = 0; \\ R_{1y} + R_{5y} - 5 = 0; \\ 2R_{1x} - 1R_{1y} + 1 = 0; \\ 2R_{5x} + 1R_{5y} - 1 = 0. \end{cases}$$

Решив данную систему, найдем

$$R_{1x} = -0,25 \text{ кН}; R_{1y} = 0,5 \text{ кН}; R_{5x} = -1,75 \text{ кН}; R_{5y} = 4,5 \text{ кН}.$$

Решение, полученное по методу конечных элементов и на основе уравнений статики, совпадают, что указывает на правильность решения.

Заметим также, что алгоритм решения статически определимых и статически неопределимых задач по методу конечных элементов одинаков. Классические же методы решения статически неопределимых рам по методу сил или по методу перемещений могут быть весьма громоздки.

Рассмотрим ту же плоскую раму, что на рис. 3, только без шарниров. Такая рама представлена на рис. 4. Она является статически неопределимой. Для такой рамы возникает 6 опорных реакций, тогда как уравнений равновесия можно составить только 3. Рассчитать такую раму классическими методами можно по методу сил или методу перемещений.

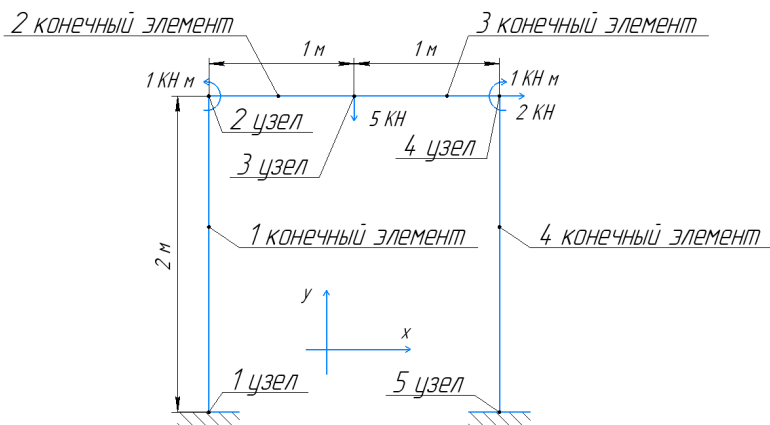


Рис. 4. Та же рама, что и на рис. 3, но без шарниров

При расчете этой рамы по методу конечных элементов изменятся только матрицы жесткости. Для конечных элементов 1 и 4 они примут вид

$$K^{(1)} = K^{(4)} = \begin{pmatrix} 6000 & 0 & 0 & -6000 & 0 & 0 \\ 0 & 135 & 135 & 0 & -135 & 135 \\ 0 & 135 & 180 & 0 & -135 & 90 \\ -6000 & 0 & 0 & 6000 & 0 & 0 \\ 0 & -135 & -135 & 0 & 135 & -135 \\ 0 & 135 & 90 & 0 & -135 & 180 \end{pmatrix};$$

а для конечных элементов 2 и 3 –

$$K^{(2)} = K^{(3)} = \begin{pmatrix} 1200 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 1080 & 540 & 0 & -1080 & 540 \\ 0 & 540 & 360 & 0 & -540 & 180 \\ -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 & 0 \\ 0 & -1080 & -540 & 0 & 1080 & -540 \\ 0 & 540 & 180 & 0 & -540 & 360 \end{pmatrix}.$$

Углы поворота и матрицы сборки остаются прежними. Глобальная матрица сборки, как и прежде, определяется выражением (9)

$$K = L_{12}T_1K^{(1)}T_1^{\text{TP}}L_{12}^{\text{TP}} + L_{23}T_2K^{(2)}T_2^{\text{TP}}L_{23}^{\text{TP}} + L_{34}T_3K^{(3)}T_3^{\text{TP}}L_{34}^{\text{TP}} + L_{45}T_4K^{(4)}T_4^{\text{TP}}L_{45}^{\text{TP}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 135 & 0 & -135 & -135 & 0 & -135 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6000 & 0 & 0 & -6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 180 & 135 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 135 & 12135 & 0 & 135 & -12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6000 & 0 & 0 & 7080 & 540 & 0 & -1080 & 540 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 90 & 135 & 540 & 540 & 0 & -540 & 180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 24000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1080 & -540 & 0 & 2160 & 0 & 0 & -1080 & 540 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 540 & 180 & 0 & 0 & 720 & 0 & -540 & 180 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 12135 & 0 & 135 & -135 & 0 & 135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1080 & -540 & 0 & 7080 & -540 & 0 & -6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 540 & 180 & 135 & -540 & 540 & -135 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -135 & 0 & -135 & 135 & 0 & -135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6000 & 0 & 0 & 6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 135 & 0 & 90 & -135 & 0 & 180 \end{pmatrix}$$

Матрица перемещений и матрица усилий имеют вид

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ S_{2x}S_{2y}\theta_2S_{3x}S_{3y}\theta_3S_{4x}S_{4y}\theta_4 \ 0 \ 0 \ 0)^{\text{TP}};$$

$$R = (R_{1x}R_{1y}M_1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -5 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1 \ R_{5x}R_{5y}M_5)^{\text{TP}}.$$

Решив систему $KS = R$, найдем

$$S_{2x} = 0,011 \text{ м}; S_{2y} = -2,747 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \theta_2 = -4,186 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$S_{3x} = 0,011 \text{ м}; S_{3y} = -3,176 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \theta_3 = 1,435 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$S_{4x} = 0,011 \text{ м}; S_{4y} = -5,586 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \theta_4 = -2,407 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$R_{1x} = -0,87 \text{ кН}; R_{1y} = 1,648 \text{ кН}; M_1 = 1,058 \text{ кН м};$$

$$R_{5x} = -1,13 \text{ кН}; R_{5y} = 3,352 \text{ кН}; M_5 = 1,238 \text{ кН м}.$$

Используя соотношения (10), можно найти усилия в конечных элементах в локальной системе координат

$$r_{12}^{(1)} = K^{(1)}T_1^{\text{TP}}L_{12}^{\text{TP}}S = (1,648 \ 0,87 \ 1,058 \ -1,648 \ -0,87 \ 0,682)^{\text{TP}};$$

$$r_{23}^{(2)} = K^{(2)}T_2^{\text{TP}}L_{23}^{\text{TP}}S = (-0,87 \ 1,648 \ 0,318 \ 0,87 \ -1,648 \ 1,33)^{\text{TP}};$$

$$r_{34}^{(3)} = K^{(3)}T_3^{\text{TP}}L_{34}^{\text{TP}}S = (-0,87 \ -3,352 \ -1,33 \ 0,87 \ 3,352 \ -2,022)^{\text{TP}};$$

$$r_{45}^{(4)} = K^{(4)}T_4^{\text{TP}}L_{45}^{\text{TP}}S = (3,352 \ 1,13 \ 1,022 \ -3,352 \ -1,13 \ 1,238)^{\text{TP}}.$$

Эти усилия показаны на рис. 5.

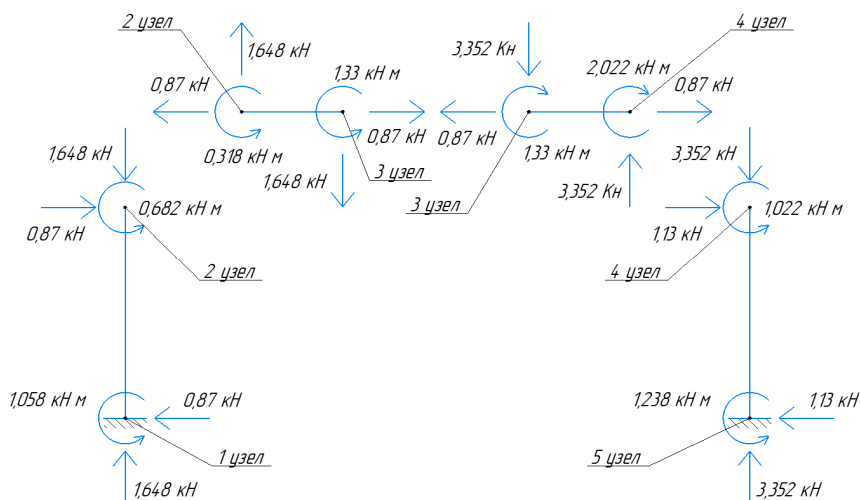


Рис. 5. Усилия в конечных элементах

Расчет усилий в крайних точках конечных элементов, позволяет построить эпюры нормальных сил, поперечных сил, а также изгибающих моментов в каждом стержне рамы. Эти эпюры можно видеть на рис. 6.

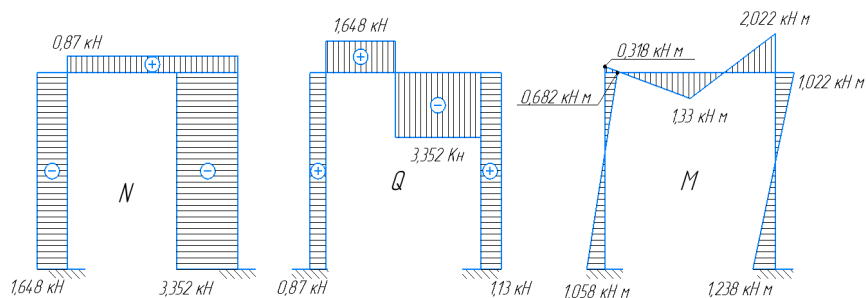


Рис. 6. Эпюры нормальных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M

В заключение отметим, что описанный выше метод формирования глобальной матрицы жесткости с использованием матриц сборки, является эффективным методом вычислений и позволяет проводить расчеты плоских стержневых систем более эффективно, в сравнении с ручным методом сборки глобальной матрицы жесткости, который по сей день исполь-

зуется большинством авторов. Также к достоинствам использования матриц сборки следует отнести более удобную алгоритмизацию метода конечных элементов при создании автоматизированных систем проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жаров А.Н.* Об изложении метода конечных элементов для расчета деформаций в стержневых системах / А.Н. Жаров, И.Г. Миневичева // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. С. 74-80.
2. *Жаров А.Н.* Расчет стационарного одномерного температурного поля по методу конечных элементов / А.Н. Жаров, И.Г. Миневичева // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 63-72.

УДК 519.6

А. Н. Жаров, И. Г. Минеичева

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ZharovAN@ystu.ru,
MineichevaIG@ystu.ru

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ДВУМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Излагается методика расчета стационарного двумерного температурного поля методом конечных элементов. Получено уравнение теплопроводности в слабой форме для двумерного случая. В матричной форме, с использованием матриц сборки, вычислены все составляющие уравнения теплопроводности, записанного в слабой форме. Приводится пример по расчету температурного поля для плоской теплопроводной квадратной пластины.

Ключевые слова: метод конечных элементов, приближенные методы теории теплопроводности

A. N. Zharov, I. G. Mineicheva

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ZharovAN@ystu, MineichevaIG@ystu.ru

FINITE ELEMENT METHOD FOR STATIONARY TWO-DIMENSIONAL TEMPERATURE FIELD

The paper presents a method for calculating a stationary two-dimensional temperature field using the finite element method. A weak form heat conduction equation is obtained for a two-dimensional case. All components of the weak form heat conduction equation are calculated in matrix form using assembly matrices. An example is given for calculating the temperature field for a flat heat-conducting square plate.

Keywords: finite element method, approximate heat conduction methods

Задача о расчете одномерного стационарного температурного поля методом конечных элементов рассмотрена в [1]. В данной работе рассмотрим задачу определения двумерного температурного поля $T(x; y)$ для плоского тела, на границах которого задаются граничные условия на температуру или (и) плотность теплового потока. Такое тело изображено на рис. 1. Границу тела обозначим Γ . Ту часть Γ , где задается плотность теп-

лового потока $\vec{j}(x; y)$, обозначим Γ_j , а где задается температура, обозначим Γ_T . Таким образом, $\Gamma = \Gamma_j \cup \Gamma_T$ и $\Gamma_j \cap \Gamma_T = \emptyset$.

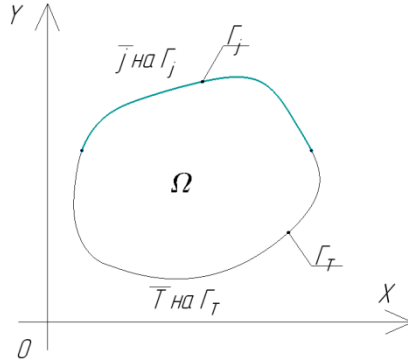


Рис. 1. Двумерное теплопроводное тело, на границах которого задаются температура или (и) плотность теплового потока

Количество теплоты, выделяемое источниками в единице объема тела, обозначим $q(x; y)$, плотность теплового потока обозначим $\vec{j}(x; y)$, коэффициент теплопроводности тела обозначим $\lambda(x; y)$, вектор внешней нормали к границе тела обозначим $\vec{n}(x; y)$.

Процесс распространения тепла описывается следующими уравнениями:

уравнение энергетического баланса:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} - q = 0 \quad \text{на области } \Omega, \quad (1)$$

закон теплопроводности Фурье:

$$\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad \text{на области } \Omega, \quad (2)$$

граничные условия:

$$j_n = \vec{j} \cdot \vec{n} = \bar{j} \quad \text{на границе } \Gamma_j, \quad (3)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{на границе } \Gamma_T, \quad (4)$$

где $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – двумерный дифференциальный оператор Набла.

Задача (1)–(4) записана в дифференциальном виде. Перейдем к интегральному виду задачи. Для этого выберем несколько весовых функций

$w_i(x; y)$, которые определим несколько позже. Уравнение (1) помножим на функцию $w_i(x; y)$ и проинтегрируем по площади тела.

$$\iint_{\Omega} w_i(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} - q) d\Omega = 0; \quad \forall w_i. \quad (5)$$

Уравнение (3) помножим на функцию $w_i(x; y)$ и проинтегрируем по границе Γ_j .

$$\int_{\Gamma_j} w_i(\vec{j} - \vec{j} \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0; \quad \forall w_i. \quad (6)$$

Используя формулу $\vec{\nabla} \cdot (w_i \vec{j}) = w_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{\nabla} w_i$ и формулу Остроградского – Гаусса

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (w_i \vec{j}) d\Omega = \oint_{\Gamma} w_i \vec{j} \cdot \vec{n} d\Gamma,$$

преобразуем уравнение (5):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} w_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\Omega - \iint_{\Omega} w_i q d\Omega &= 0 \quad \forall w_i; \\ \iint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (w_i \vec{j}) d\Omega - \iint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{\nabla} w_i d\Omega - \iint_{\Omega} w_i q d\Omega &= 0 \quad \forall w_i; \\ \oint_{\Gamma} w_i \vec{j} \cdot \vec{n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{\nabla} w_i d\Omega - \iint_{\Omega} w_i q d\Omega &= 0 \quad \forall w_i. \end{aligned}$$

Распишем интеграл по контуру Γ на два интеграла

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{\nabla} w_i d\Omega + \int_{\Gamma_j} w_i \vec{j} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} w_i \vec{j} \cdot \vec{n} d\Gamma - \\ - \iint_{\Omega} w_i q d\Omega = 0 \quad \forall w_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (2) и (6) перепишем (7) в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \vec{\nabla} w_i \cdot \lambda \vec{\nabla} T d\Omega + \int_{\Gamma_j} w_i \vec{j} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} w_i \vec{j} \cdot \vec{n} d\Gamma - \\ - \iint_{\Omega} w_i q d\Omega = 0 \quad \forall w_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим конечный элемент, содержащий 3 точки. Координаты этих точек обозначим $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$. Такой конечный элемент показан на рис. 2.

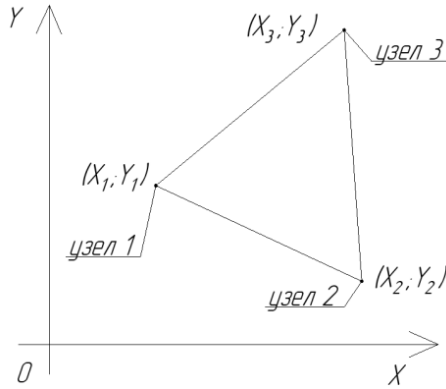


Рис. 2. Треугольный конечный элемент

Температуру внутри этого конечного элемента будем искать в виде линейной функции

$$T(x; y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y. \quad (9)$$

Формулу (9) запишем для узловых точек конечного элемента

$$\begin{cases} T_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1; \\ T_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2; \\ T_3 = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3. \end{cases} \quad (10)$$

Из системы (10) найдем коэффициенты α_0 ; α_1 ; α_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{T_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) - T_2(x_1 y_3 - x_3 y_1) + T_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)}; \\ \alpha_1 &= \frac{T_1(y_2 - y_3) - T_2(y_1 - y_3) + T_3(y_1 - y_2)}{(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)}; \\ \alpha_2 &= \frac{T_1(x_3 - x_2) + T_2(x_1 - x_3) + T_3(x_2 - x_1)}{(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Удвоенная ориентированная площадь треугольника с вершинами в узлах конечного элемента равна

$$2S_{123} = x_2 y_3 - x_3 y_2 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1. \quad (12)$$

Учитывая (11) и (12), выражение (9) запишем в виде

$$T(x; y) = w_1(x; y)T_1 + w_2(x; y)T_2 + w_3(x; y)T_3. \quad (13)$$

где

$$w_1(x; y) = \frac{1}{2S_{123}}(x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y);$$

$$w_2(x; y) = \frac{1}{2S_{123}}(x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y);$$

$$w_3(x; y) = \frac{1}{2S_{123}}(x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y). \quad (14)$$

В узловых точках эти функции принимают значения

$$w_1(x_1; y_1) = \frac{2S_{123}}{2S_{123}} = 1; w_1(x_2; y_2) = 0; w_1(x_3; y_3) = 0;$$

$$w_2(x_1; y_1) = 0; w_2(x_2; y_2) = \frac{2S_{123}}{2S_{123}} = 1; w_2(x_3; y_3) = 0;$$

$$w_3(x_1; y_1) = 0; w_3(x_2; y_2) = 0; w_3(x_3; y_3) = \frac{2S_{123}}{2S_{123}} = 1.$$

Частные производные от температуры имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T_1 \frac{\partial w_1(x; y)}{\partial x} + T_2 \frac{\partial w_2(x; y)}{\partial x} + T_3 \frac{\partial w_3(x; y)}{\partial x} =$$

$$= T_1 \frac{(y_2 - y_3)}{2S_{123}} + T_2 \frac{(y_3 - y_1)}{2S_{123}} + T_3 \frac{(y_1 - y_2)}{2S_{123}};$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = T_1 \frac{\partial w_1(x; y)}{\partial y} + T_2 \frac{\partial w_2(x; y)}{\partial y} + T_3 \frac{\partial w_3(x; y)}{\partial y} =$$

$$= T_1 \frac{(x_3 - x_2)}{2S_{123}} + T_2 \frac{(x_1 - x_3)}{2S_{123}} + T_3 \frac{(x_2 - x_1)}{2S_{123}}.$$

Градиент температуры в матричном виде равен

$$\vec{\nabla}T = \frac{1}{2S_{123}} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Градиенты функций w_i

$$\vec{\nabla}w_1 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}; \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{2S_{123}}(y_2 - y_3; x_3 - x_2);$$

$$\vec{\nabla}w_2 = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}; \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) = \frac{1}{2S_{123}}(y_3 - y_1; x_1 - x_3); \quad (16)$$

$$\vec{\nabla}w_3 = \left(\frac{\partial w_3}{\partial x}; \frac{\partial w_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{2S_{123}}(y_1 - y_2; x_2 - x_1).$$

Подставляя в уравнение (7) вместо функций w_i функции w_1, w_2, w_3 , получим систему уравнений, которую можно записать в матричном виде

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot \lambda \vec{\nabla} T d\Omega + \int_{\Gamma_j} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \bar{j} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \bar{j} \cdot \vec{n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} q d\Omega = 0. \quad (17)$$

С учетом (15)–(16) первый интеграл в (17) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \vec{\nabla} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot \lambda \vec{\nabla} T d\Omega = \\ & = \frac{\lambda}{4S_{123}^2} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \iint_{\Omega} d\Omega = \\ & = \lambda S_{123} B_{123}^{\text{тр}} B_{123} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$B_{123} = \frac{1}{2S_{123}} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим второй интеграл в (17), предполагая, что между узлами 1 и 2 существует постоянный тепловой поток $\bar{j}$. Для этого прибегнем к геометрической интерпретации интеграла, представленной на рис. 3,

$$\int_{\Gamma_j} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \bar{j} d\Gamma = \begin{pmatrix} \bar{j} l_{12}/2 \\ \bar{j} l_{12}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где l_{12} - расстояние между 1 и 2 узлами.

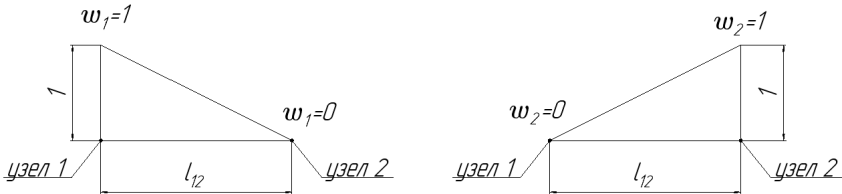


Рис. 3. Геометрическая иллюстрация вычисления значения второго интеграла в выражении (17)

Рассмотрим четвертый интеграл в предположении, что количество теплоты, выделяемое источниками в единице объема тела q , является постоянным. Будем считать, что источники теплоты действуют по всей площади конечного элемента. Интеграл вычислим геометрически (см. рис. 4)

$$\iint_{\Omega} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} q d\Omega = \begin{pmatrix} q S_{123}/3 \\ q S_{123}/3 \\ q S_{123}/3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Отметим, что формулы (19) и (20) указывают на то, что тепловой поток и теплота, подводимые или отводимые от конечного элемента, равномерно распределяются на узлы конечного элемента.

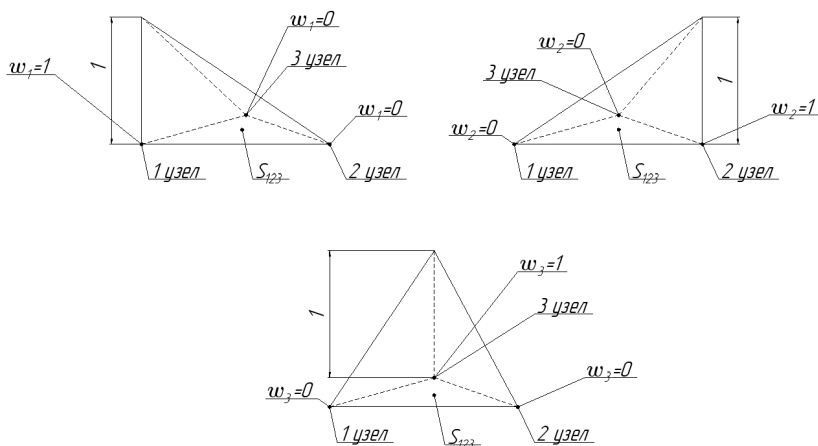


Рис. 4. Геометрическая иллюстрация вычисления значения четвертого интеграла в выражении (17)

Предположим, что плоское теплопроводное тело разбито треугольными конечными элементами, количество которых $N_{\text{эл}}$. Такое тело показано на рис. 5.

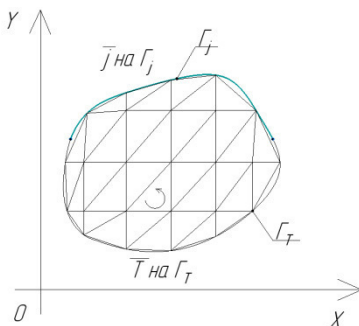


Рис. 5. Теплопроводное тело, разбитое на конечные элементы. (Стрелкой указано направление обхода узлов в конечном элементе)

Число узлов обозначим $N_{уз}$. Введем полную матрицу температур

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_{N_{уз}} \end{pmatrix}^{\text{TP}},$$

где T_i - это температуры в узлах сетки. Также введем матрицы сборки размера $3 \times N_{уз}$ вида

$$L_{imk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & m & \dots & k & \dots & N_{уз} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где сверху подписаны номера узлов для наглядности.

Температуры в узлах конечного элемента с помощью матриц сборки можно выразить через полную матрицу температур

$$\begin{pmatrix} T_i \\ T_m \\ T_k \end{pmatrix} = L_{imk} \tilde{T}. \quad (21)$$

Уравнение (17) умножим на L_{imk}^{TP} , просуммируем по всем конечным элементам и учтем (21) и (18)

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_{эл}} L_{imk}^{\text{TP}} \lambda S_{imk}^e B_{imk}^{e \text{ TP}} B_{imk}^e L_{imk} \tilde{T} = & - \sum_{e=1}^{N_{эл}} \int_{\Gamma_j} L_{imk}^{\text{TP}} \begin{pmatrix} w_i^e \\ w_m^e \\ w_k^e \end{pmatrix} \bar{j} d\Gamma - \\ & - \sum_{e=1}^{N_{эл}} \int_{\Gamma_T} L_{imk}^{\text{TP}} \begin{pmatrix} w_i^e \\ w_m^e \\ w_k^e \end{pmatrix} \vec{j} \cdot \vec{n} d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{эл}} \iint_{\Omega} L_{imk}^{\text{TP}} \begin{pmatrix} w_i^e \\ w_m^e \\ w_k^e \end{pmatrix} q d\Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Левая часть (22) содержит глобальную матрицу жесткости размера $N_{уз} \times N_{уз}$

$$K = \sum_{e=1}^{N_{эл}} L_{imk}^{\text{TP}} \lambda S_{imk}^e B_{imk}^{e \text{ TP}} B_{imk}^e L_{imk}, \quad (23)$$

где

$$B_{imk}^e = \frac{1}{2S_{imk}^e} \begin{pmatrix} y_m - y_k & y_k - y_i & y_i - y_m \\ x_k - x_m & x_i - x_k & x_m - x_i \end{pmatrix}.$$

Условимся, что при вычислении величин B_{imk}^e , S_{imk}^e , а также при использовании формул (22), (23) и других подобных выражений, каждый конечный элемент будем обходить против часовой стрелки. Это позволит в первом и втором слагаемых в правой части выражения (22) криволинейные интегралы вычислять только по границе тела.

В качестве примера рассмотрим квадратную пластину размера 2 метра на 2 метра с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 10 \text{ Вт}/(\text{м К})$. Верхняя граница пластины поддерживается при постоянной температуре $T = 30^\circ \text{C}$. К нижней границе подводится тепловой поток $j = 10 \text{ Вт}/\text{м}$. На правой и левой границах тепловой поток примем равным нулю $j = 0$.

Примем, что внутри пластины содержатся источники тепла плотностью $q = 12 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Такая пластина представлена на рис. 6.

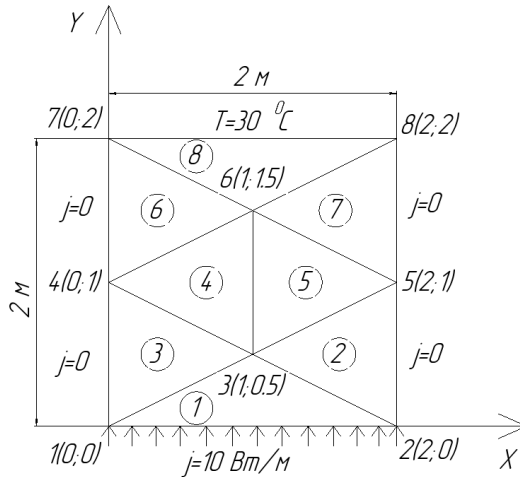


Рис. 6. Теплопроводная пластина, разбитая на восемь конечных элементов
(Номера конечных элементов обведены кругом. Узлы пронумерованы и около каждого узла указаны его координаты)

По формуле (23) определим матрицу жесткости

$$K = \lambda L_{123}^{\text{тр}} S_{123}^1 B_{123}^1 L_{123} + \lambda L_{325}^{\text{тр}} S_{325}^2 B_{325}^2 L_{325} + \\ + \lambda L_{134}^{\text{тр}} S_{134}^3 B_{134}^3 L_{134} + \lambda L_{436}^{\text{тр}} S_{436}^4 B_{436}^4 L_{436} + \\ + \lambda L_{356}^{\text{тр}} S_{356}^5 B_{356}^5 L_{356} + \lambda L_{467}^{\text{тр}} S_{467}^6 B_{467}^6 L_{467} + \\ + \lambda L_{658}^{\text{тр}} S_{658}^7 B_{658}^7 L_{658} + \lambda L_{687}^{\text{тр}} S_{687}^8 B_{687}^8 L_{687},$$

где

$$B_{123}^1 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B_{325}^2 = B_{436}^4 = B_{658}^7 = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \\ B_{134}^3 = B_{356}^5 = B_{467}^6 = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & -0,5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B_{687}^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\ S_{123}^1 = S_{325}^2 = S_{134}^3 = S_{436}^4 = S_{356}^5 = S_{467}^6 = S_{658}^7 = S_{687}^8 = 0,5;$$

$$\begin{aligned}
 L_{123} &= \begin{pmatrix} 10000000 \\ 01000000 \\ 00100000 \end{pmatrix}; L_{325} = \begin{pmatrix} 00100000 \\ 01000000 \\ 00001000 \end{pmatrix}; \\
 L_{134} &= \begin{pmatrix} 10000000 \\ 00100000 \\ 00010000 \end{pmatrix}; L_{436} = \begin{pmatrix} 00010000 \\ 00100000 \\ 00000100 \end{pmatrix}; \\
 L_{356} &= \begin{pmatrix} 00100000 \\ 00001000 \\ 00000100 \end{pmatrix}; L_{467} = \begin{pmatrix} 00010000 \\ 00000100 \\ 00000010 \end{pmatrix}; \\
 L_{658} &= \begin{pmatrix} 00000100 \\ 00001000 \\ 00000001 \end{pmatrix}; L_{687} = \begin{pmatrix} 00000100 \\ 00000001 \\ 00000010 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Она имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 12,5 & 3,75 & -12,5 & -3,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,75 & 12,5 & -12,5 & 0 & -3,75 & 0 & 0 & 0 \\ -12,5 & -12,5 & 42,5 & -5 & -5 & -7,5 & 0 & 0 \\ -3,75 & 0 & -5 & 17,5 & 0 & -5 & -3,75 & 0 \\ 0 & -3,75 & -5 & 0 & 17,5 & -5 & 0 & -3,75 \\ 0 & 0 & -7,5 & -5 & -5 & 42,5 & -12,5 & -12,5 \\ 0 & 0 & 0 & -3,75 & 0 & -12,5 & 12,5 & 3,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,75 & -12,5 & 3,75 & 12,5 \end{pmatrix}.$$

Используя (20), вычислим третий интеграл в правой части формулы (22).

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^8 \iint_{\Omega} L_{imk}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} w_i^e \\ w_m^e \\ w_k^e \end{pmatrix} q \, d\Omega &= \frac{qS_{123}^1}{3} L_{123}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{qS_{325}^2}{3} L_{325}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{qS_{134}^3}{3} L_{134}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{qS_{436}^4}{3} L_{436}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{qS_{356}^5}{3} L_{356}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{qS_{467}^6}{3} L_{467}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{qS_{658}^7}{3} L_{658}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{qS_{687}^8}{3} L_{687}^{\text{тр}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \\ 6 \\ 6 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части формулы (22) вычислим, используя (19):

$$-\sum_{e=1}^{N_{эл}} \int_{\Gamma_j} L_{imk}^{tp} \begin{pmatrix} w_i^e \\ w_m^e \\ w_k^e \end{pmatrix} \bar{j} d\Gamma = - \begin{pmatrix} -10 \cdot 2/2 \\ -10 \cdot 2/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Второй интеграл в правой части (22) позволит найти тепловой поток, через те узлы, в которых заданы температуры. Для нашей задачи – это узлы 7 и 8.

$$-\sum_{e=1}^{N_{эл}} \int_{\Gamma_T} L_{imk}^{tp} \begin{pmatrix} w_i^e \\ w_m^e \\ w_k^e \end{pmatrix} \vec{j} \cdot \vec{n} d\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j_7 \\ -j_8 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (22) для нашей задачи примет вид

$$K \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j_7 \\ -j_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \\ 6 \\ 6 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решая данную систему, найдем

$$T_1 = 34,4 \text{ } ^\circ\text{C}; T_2 = 34,4 \text{ } ^\circ\text{C}; T_3 = 33,76 \text{ } ^\circ\text{C}; T_4 = 32,80 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T_5 = 32,80 \text{ } ^\circ\text{C}; T_6 = 31,56 \text{ } ^\circ\text{C}; j_7 = 34 \text{ Вт/м}; j_8 = 34 \text{ Вт/м}.$$

Используя формулу (15) с учетом (21), найдем потоки теплоты в каждом конечном элементе

$$\begin{aligned}\vec{j}^1 &= -\lambda B_{123}^1 L_{123} \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12,83 \end{pmatrix}; \quad \vec{j}^2 = -\lambda B_{325}^2 L_{325} \vec{T} = \begin{pmatrix} 1,56 \\ 15,95 \end{pmatrix}; \\ \vec{j}^3 &= -\lambda B_{134}^3 L_{134} \vec{T} = \begin{pmatrix} -1,56 \\ 15,95 \end{pmatrix}; \quad \vec{j}^4 = -\lambda B_{436}^4 L_{436} \vec{T} = \begin{pmatrix} 1,46 \\ 22 \end{pmatrix}; \\ \vec{j}^5 &= -\lambda B_{356}^5 L_{356} \vec{T} = \begin{pmatrix} -1,46 \\ 22 \end{pmatrix}; \quad \vec{j}^6 = -\lambda B_{467}^6 L_{467} \vec{T} = \begin{pmatrix} -1,56 \\ 28,05 \end{pmatrix}; \\ \vec{j}^7 &= -\lambda B_{658}^7 L_{658} \vec{T} = \begin{pmatrix} 1,56 \\ 28,05 \end{pmatrix}; \quad \vec{j}^8 = -\lambda B_{687}^8 L_{687} \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 31,17 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

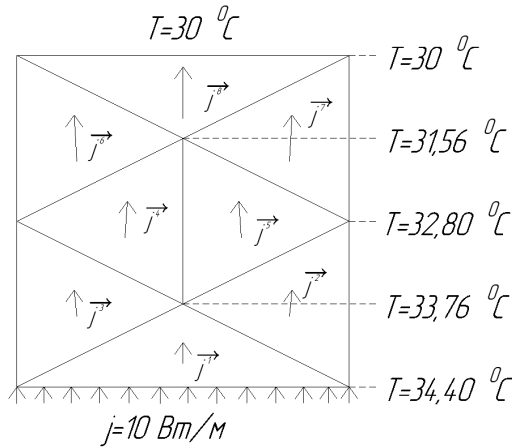


Рис. 7. Тепловые потоки и температуры в пластине

Тепловые потоки и температуры в пластине можно видеть на рис. 7.

Таким образом, метод конечных элементов для плоского двумерного температурного поля несложно реализуется на основе уравнения теплопроводности в интегральной форме (в слабой форме). Использование матриц сборки позволяет избежать ручной работы по формированию основных матриц системы, таких как матрица жесткости и прочих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жаров А.Н. Расчет стационарного одномерного температурного поля по методу конечных элементов / А.Н. Жаров, И.Г. Миничева // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 63-72.

УДК 621.43.016.07

А. А. Ивнев, Е. Р. Ярвепер

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ivnevaa@ystu, yarveper00@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНОГО СОСТАВА ГАЗОВОЙ СМЕСИ ПРИ РАСЧЕТЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ЦИКЛА ПОРШНЕВОГО ДВС

Выполнена аналитическая сравнительная оценка термических и энергетических параметров состояния и функций рабочего тела в процессах идеального цикла Отто и теоретического термодинамических циклов поршневого бензинового ДВС на основе моделирования реального состава газовой смеси.

Ключевые слова: идеальный и теоретический термодинамические циклы, газовая смесь, зависимость теплоемкости от температуры, параметры состояния, показатели эффективности

A. A. Ivnev, E. P. Yarveper

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ivnevaa@ystu, yarveper00@mail.ru

SIMULATION OF THE REAL COMPOSITION OF THE OF A GAS MIXTURE WHEN CALCULATING THE THEORETICAL THERMODYNAMIC CYCLE OF A RECIPROCATING INTERNAL COMBUSTION ENGINE

An analytical comparative assessment of thermal and energy parameters of the state and functions of the working fluid in the processes of the ideal Otto cycle and theoretical thermodynamic cycles of a piston gasoline internal combustion engine was performed based on modeling the real composition of the gas mixture.

Keywords: ideal and theoretical thermodynamic cycles, gas mixture, dependence of heat capacity on temperature, state parameters, thermal efficiency

Постановка задачи. В курсе «Термодинамика» для студентов направления «Энергетическое машиностроение» рассматриваются вопросы аналитической оценки эффективности и работоспособности термодинамических циклов поршневых двигателей внутреннего сгорания (ДВС). При сравнении термодинамических циклов различных схем, а также при сравнении идеальных и теоретических циклов важным представляется задание

свойств рабочего тела, в наибольшей степени соответствующих реальным топливовоздушным газовым смесям и продуктам сгорания поршневого ДВС.

Теоретический термодинамический цикл – совокупность последовательных обратимых повторяющихся процессов, осуществляемая реальным рабочим телом (газовой смесью) переменного состава и свойств, с целью превращения энергии сгорания топлива в механическую работу при значениях начальных параметров рабочего тела, степени сжатия, соответствующих идеальному термодинамическому циклу-прототипу.

В теоретических и действительных циклах состав и свойства рабочего тела не являются постоянными величинами, имеет место смена рабочего тела; показатели политропы процессов сжатия и расширения в этом случае не являются постоянными величинами.

Целью работы является аналитическая оценка влияния учета свойств реального рабочего тела на показатели термодинамического цикла, сравнение значений термических параметров состояния рабочего тела в характерных точках идеального и теоретического термодинамических циклов.

Метод исследования аналитический: используются известные термические уравнения состояния идеального газа, первое начало термодинамики для термодинамических обратимых процессов в идеальном и теоретическом циклах [1, 2].

Общие сведения. При расчете идеальных термодинамических циклов в процессах сжатия в качестве рабочего тела может использоваться идеальный газ со свойствами воздуха (газовая идеальная смесь), в процессе политропного сжатия в теоретическом термодинамическом цикле рабочим телом также может быть воздух.

В теоретическом термодинамическом цикле в отличие от идеального учитывается реальный состав и свойства рабочего тела.

Теоретический термодинамический цикл поршневого бензинового двигателя внутреннего сгорания рассчитывается на основе идеального цикла-прототипа, цикла Отто [1, 2] (рис. 1).

Массовые доли основных компонентов воздуха (кислорода и азота) в процессе сжатия 1-2 на рис. 1 остаются неизменными; другими компонентами воздуха (аргон, углекислый газ и др.) допустимо пренебречь в виду их малой концентрации.

Зависимость удельной массовой теплоемкости воздуха от температуры может быть учтена с помощью справочных таблиц или по эмпирическим уравнениям.

Количество теплоты, подводимой к единице массы рабочего тела, в изохорном процессе 2-3 на рис. 1 определяется исходя из известного зна-

чения удельной теплоты сгорания топлива и состава топливовоздушной смеси, кДж/кг р.т. [7]:

$$q_1 = \xi \cdot \frac{H_u}{1 + \alpha \cdot l_0}, \quad (1)$$

где H_u – удельная теплота сгорания топлива, кДж/кг топл; $1 + \alpha l_0$ – масса топливовоздушной смеси, получаемая из 1 кг топлива при смешении с воздухом; ξ – коэффициент использования теплоты сгорания топлива, принимаемый по опытным данным для бензиновых двигателей равным в диапазоне 0,80-0,90; α – коэффициент избытка воздуха в рабочей смеси.

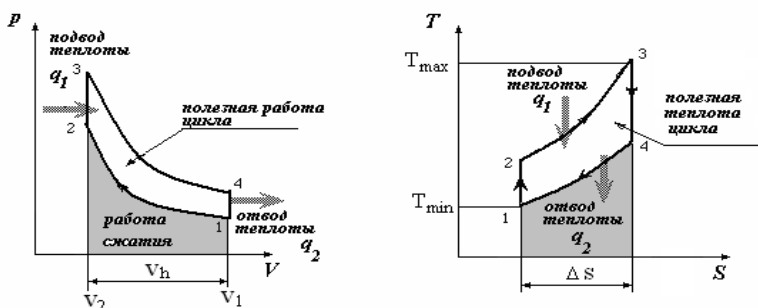


Рис. 1. Схема идеального цикла Отто в p, v - и $T, \Delta s$ -системах координат:

1-2 – адиабатический процесс сжатия; 2-3 – изохорный подвод теплоты; 3-4 – адиабатический процесс расширения; 4-1 – изохорный отвод теплоты

Степень повышения давления в изохорном процессе 2-3 подвода теплоты зависит от количества подводимой теплоты

$$\lambda = 1 + \frac{q_1}{c_v \cdot T_1 \cdot \varepsilon^{n-1}}, \quad (2)$$

где c_v – удельная изохорная теплоёмкость рабочего тела, в общем случае зависящая от температуры; T_1 – температура в начальной точке цикла; ε – степень сжатия.

В процессе экзотермической химической реакции горения углеводородного топлива в рабочем объеме цилиндра поршневого ДВС (процесс 2-3 на рис. 1) изменяется состав рабочего тела: образуется смесь газов, компонентами которой являются продукты сгорания топлива, избыточный азот и неиспользованный кислород из воздуха.

Количество газовой смеси, получающейся при полном сгорании 1 кг углеводородного топлива с коэффициентом избытка воздуха $\alpha > 1$ с учетом

стехиометрического соотношения «воздух-топливо», составит $1 + \alpha l_0$ кг (известно, что для стехиометрических топливовоздушных смесей дизельного топлива $l_0 = 14,45$ кг воздуха/кг топлива; для бензовоздушных смесей $l_0 = 14,95$ кг воздуха/кг топлива [5, 9]).

При полном сгорании единицы массы углеводородного топлива массовый состав образующейся газовой смеси считается известным [8]: углекислый газ $\text{CO}_2 - 3,67 g_C$, водяной пар $\text{H}_2\text{O} - 9 g_H$, оставшиеся от избыточного воздуха азот $\text{N}_2 - 0,77 \alpha l_0$ и кислород $\text{O}_2 - 0,23 l_0 (\alpha - 1)$, здесь g_C, g_H – массовые доли углерода, водорода в углеводородном топливе известного фракционного состава приведены в табл. 1.

В процессе 3-4 политропного расширения (см. рис. 1) при увеличении объема цилиндра массовые доли компонентов газовой смеси не изменяются.

В изохорном процессе 4-1 (см. рис. 1) изменяется состав рабочего тела: продукты сгорания заменяются воздухом; термодинамические свойства рабочего тела приводятся к начальной точке цикла.

Таблица 1. Массовые доли компонентов топлив

Топливо	Массовые доли компонентов		
	g_C	g_H	g_O
Бензин	0,855	0,145	-
Дизельное топливо	0,870	0,126	0,004
Природный газ (метан)	0,75	0,25	-

Массовые доли компонентов газовой смеси (продуктов сгорания) определяется по следующим формулам [5]:

- массовая доля углекислого газа:

$$g_{\text{CO}_2} = \frac{3,67 \cdot g_C}{1 + \alpha \cdot l_0}; \quad (3)$$

- массовая доля водяных паров:

$$g_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{9 \cdot g_H}{1 + \alpha \cdot l_0}; \quad (4)$$

- массовая доля азота:

$$g_{\text{N}_2} = \frac{0,77 \cdot \alpha \cdot l_0}{1 + \alpha \cdot l_0}; \quad (5)$$

- массовая доля кислорода:

$$g_{\text{O}_2} = \frac{0,23 \cdot l_0 \cdot (\alpha - 1)}{1 + \alpha \cdot l_0}; \quad (6)$$

Результаты расчета массовых долей компонентов газовой смеси, полученной при сгорании 1 кг бензовоздушной смеси при различных коэффициентах избытка воздуха представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты расчета массовых долей компонентов газовой смеси при различных коэффициентах избытка воздуха

Коэффициент избытка воздуха α	Массовые доли компонентов газовой смеси			
	g_{CO_2}	$g_{\text{H}_2\text{O}}$	g_{N_2}	g_{O_2}
1	0,197	0,082	0,722	0,000
1,05	0,188	0,078	0,724	0,010
1,1	0,180	0,075	0,726	0,020
1,15	0,172	0,072	0,728	0,028
1,2	0,166	0,069	0,729	0,036
1,25	0,159	0,066	0,731	0,044
0,9	0,217	0,090	0,717	-0,024
0,85	0,229	0,095	0,714	-0,038

Для определения свойств реального рабочего тела (газовой смеси): удельной массовой теплоемкости, газовой постоянной необходимо знать массовый (или объемный) состав смеси и указанные свойства отдельных компонентов.

Значения удельных массовых теплоемкостей компонентов реального рабочего тела будем определять с учетом ее зависимости от средней температуры процесса в цикле. Для этого воспользуемся справочными таблицами [1] или расчетом по интерполяционным зависимостям, приведенным в [2, 6] табл. 3.

Таблица 3. Интерполяционные температурные зависимости для средней удельной массовой изобарной и изохорной теплоемкостей идеальных газов в диапазоне от 0 до 1000 °C

Газ	c_v , кДж/(кг К)
Воздух	$0,7084 + 9,349 \cdot 10^{-5} \cdot t_{cp}$ или $c_v = 0,711 + 9,1 \cdot 10^{-5} t_{cp}$
Азот N_2	$0,7289 + 8,382 \cdot 10^{-5} \cdot t_{cp}$
Кислород O_2	$0,6527 + 12,724 \cdot 10^{-5} \cdot t_{cp}$
Водяной пар H_2O	$1,3783 + 29,278 \cdot 10^{-5} \cdot t_{cp}$
Углекислый CO_2	$0,6837 + 24,053 \cdot 10^{-5} \cdot t_{cp}$

В таблице t_{cp} - средняя температура воздуха в процессе, °C.

Удельная массовая изобарная теплоемкость газовой смеси определяется через соответствующие удельные теплоемкости компонентов и их массовые доли:

$$c_p = g_{\text{CO}_2} \cdot c_{p(\text{CO}_2)} + g_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{p(\text{H}_2\text{O})} + g_{\text{N}_2} \cdot c_{p(\text{N}_2)} + g_{\text{O}_2} \cdot c_{p(\text{O}_2)}, \quad (7)$$

где $c_{p(\text{CO}_2)}$, $c_{p(\text{H}_2\text{O})}$, $c_{p(\text{N}_2)}$, $c_{p(\text{O}_2)}$ - удельные массовые изобарные теплоемкости компонентов соответственно углекислого газа, водяного пара, азота, кислорода, в общем случае зависящие от температуры (см. табл. 3).

По известному содержанию компонентов газовой смеси можно рассчитать средние для интервала температур, в пределах которого осуществляется цикл, удельную массовую изохорную теплоемкость c_p , газовую постоянную R , удельную массовую изобарную теплоемкость c_v , показатель адиабаты k .

Газовая постоянная смеси определяется по известным значениям газовых постоянных компонентов и их массовых долей:

$$R = g_{\text{CO}_2} \cdot R_{\text{CO}_2} + g_{\text{H}_2\text{O}} \cdot R_{\text{H}_2\text{O}} + g_{\text{N}_2} \cdot R_{\text{N}_2} + g_{\text{O}_2} \cdot R_{\text{O}_2}, \quad (8)$$

где R_{CO_2} , $R_{\text{H}_2\text{O}}$, R_{N_2} , R_{O_2} - газовые постоянные компонентов: соответственно углекислого газа, водяного пара, азота, кислорода [2] (табл. 4).

Таблица 4. Значения молярной массы и газовых постоянных идеальных газов

	O ₂	N ₂	CO	CO ₂	H ₂ O	Воздух сухой (газовая смесь)
R , кДж/(кг·К)	0,260	0,297	0,297	0,189	0,462	0,287
μ , кг/кмоль	32	28	28	44	18	28,96

На рис. 2 для примера приведены результаты расчета удельных массовых теплоемкостей по уравнению (7) в процессе расширения в зависимости от качественного состава топливовоздушной смеси для газовых смесей разного состава (см. табл. 2) с использованием температурных зависимостей (см. табл. 3) и свойств компонентов (см. табл. 4). Эти данные могут быть использованы при расчете термических параметров состояния и энергетических характеристик процессов теоретического цикла.

Расчёт теоретического цикла. При расчёте массовых долей компонентов смеси по уравнениям (3)–(6) в каждом процессе теоретического термодинамического цикла было принято по 15 расчетных точек: общее

количество расчетных точек за весь цикл составило $N=60$. Расчетный шаг изменения массовых долей компонентов принят постоянным:

$$\Delta g = \frac{g_2 - g_1}{i},$$

где g_2 - массовая доля компонента в продуктах сгорания в конце процесса;
 g_1 - массовая доля компонента в начале процесса.

Массовая доля компонента в любой точке процесса:

$$g_i = g_{i-1} + \Delta g.$$

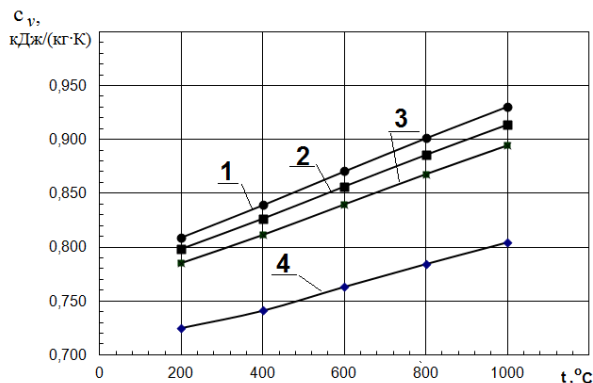


Рис. 2. Зависимость изобарной теплоемкости рабочего тела от температуры при разных коэффициентах избытка воздуха в топливовоздушной смеси:
 1 – $\alpha = 0,85$; 2 – $\alpha = 1,0$; 3 – $\alpha = 1,25$; 4 – воздух

Результаты расчёта массовых долей компонентов газовой смеси по уравнениям (3)–(6) в каждой точке процессов цикла представлены в табл. 5.

Абсолютное давление в каждой точке с номером $i = 1, \dots, N$ процесса политропного сжатия рассчитывается в зависимости от изменения удельного объёма, начиная с точки при $p_1 = 0,1$ МПа (табл. 6). Отношение максимального объёма цилиндра в начале сжатия к невытесняемому объёму в верхней мертвой точке (степень сжатия) принято для бензинового ДВС равным 9.

$$p_i = p_{i-1} \cdot \left(\frac{v_{i-1}}{v_i} \right)^{n_1}, \quad (9)$$

где $n_1 = 1,36$ – показатель политропы процесса сжатия.

Абсолютная температура в каждой точке процесса с номером $i = 1, \dots, N$ политропного сжатия рассчитывается в зависимости от абсолютного давления, начиная с точки при $T_1 = 273$ К (см. табл. 6).

$$T_i = T_{i-1} \cdot \left(\frac{p_i}{p_{i-1}} \right)^{\frac{n_i-1}{n_i}}. \quad (10)$$

Таблица 5. Результаты расчета массовых долей компонентов газовой смеси в процессах теоретического цикла

№ точки	g_{O_2}	g_{N_2}	g_{H_2O}	g_{CO_2}	R	№ точки	g_{O_2}	g_{N_2}	g_{H_2O}	g_{CO_2}	R
1	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	31	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
2	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	32	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
3	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	33	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
4	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	34	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
5	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	35	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
6	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	36	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
7	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	37	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
8	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	38	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
9	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	39	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
10	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	40	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
11	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	41	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
12	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	42	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
13	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	43	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
14	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	44	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
15	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2	45	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0
16	0,217	0,753	0,005	0,013	284,5	46	0,025	0,726	0,073	0,175	288,7
17	0,202	0,751	0,010	0,025	284,8	47	0,040	0,728	0,068	0,163	288,3
18	0,187	0,749	0,016	0,038	285,1	48	0,055	0,730	0,063	0,150	288,0
19	0,173	0,747	0,021	0,050	285,4	49	0,069	0,732	0,057	0,138	287,7
20	0,158	0,745	0,026	0,063	285,8	50	0,084	0,734	0,052	0,125	287,4
21	0,143	0,743	0,031	0,075	286,1	51	0,099	0,736	0,047	0,113	287,1
22	0,128	0,740	0,036	0,088	286,4	52	0,114	0,738	0,042	0,100	286,7
23	0,114	0,738	0,042	0,100	286,7	53	0,128	0,740	0,036	0,088	286,4
24	0,099	0,736	0,047	0,113	287,1	54	0,143	0,743	0,031	0,075	286,1
25	0,084	0,734	0,052	0,125	287,4	55	0,158	0,745	0,026	0,063	285,8
26	0,069	0,732	0,057	0,138	287,7	56	0,173	0,747	0,021	0,050	285,4
27	0,055	0,730	0,063	0,150	288,0	57	0,187	0,749	0,016	0,038	285,1
28	0,040	0,728	0,068	0,163	288,3	58	0,202	0,751	0,010	0,025	284,8
29	0,025	0,726	0,073	0,175	288,7	59	0,217	0,753	0,005	0,013	284,5
30	0,010	0,724	0,078	0,188	289,0	60	0,232	0,755	0,000	0,000	284,2

Таблица 6. Результаты расчета процесса политропного сжатия теоретического цикла

Номер точки	Удельный объём, м ³ /кг	Абсолютная температура, К	Абсолютное давление, МПа
1	0,7889	273,0	0,100
2	0,7388	279,5	0,109
3	0,6888	286,7	0,120
4	0,6387	294,6	0,133
5	0,5886	303,4	0,149
6	0,5385	313,2	0,168
7	0,4884	324,4	0,192
8	0,4383	337,3	0,222
9	0,3882	352,4	0,262
10	0,3381	370,4	0,317
11	0,2880	392,4	0,394
12	0,2379	420,3	0,511
13	0,1878	457,6	0,704
14	0,1378	511,7	1,074
15	0,0877	602,1	1,985

Абсолютное давление и абсолютная температура в конце изохорного процесса подвода теплоты:

$$p_3 = p_2 \cdot \lambda, \quad T_3 = T_2 \cdot \lambda,$$

где λ - степень повышения давления, определяемая по уравнению (2).

Расчёт изменения абсолютных температуры и давления в изохорном процессе подвода теплоты теоретического цикла с учетом зависимости удельной теплоемкости рабочего тела от температуры осуществлялся итерационным методом.

Для этого в начале итерационного расчета при рассчитанной по уравнению (10) температуре начала процесса, задавалось предполагаемое значение температуры конца процесса; по уравнению (7) рассчитывалось значение удельной теплоемкости газовой смеси при средней температуре и определялась расчетная температура конца процесса. При наличии разницы предполагаемого и расчетного значений средних удельных теплоемкостей и температур конца процесса более 1% корректировалась предполагаемая температура, затем расчет повторялся (табл. 7).

Таблица 7. Результаты расчета средней удельной изохорной теплоемкости рабочего тела в процессе подвода теплоты

Номер итерации	1	2	3	4	5	6	7
Принятое значение $c_{всп}$, Дж/кг	700	846,34	910,28	936,58	947,62	952,3	954,28
Полученное значение $c_{всп}$, Дж/кг	992,67	974,22	962,88	958,67	956,97	956,26	955,96
Ошибка, %	29,5	13,1	5,5	2,3	1,0	0,4	0,2

Аналогичным образом (уравнения (3)-(6), (7), (9), (10)) выполнены расчеты абсолютных давлений и абсолютных температур по точкам процессов политропного расширения и изохорного отвода теплоты теоретического цикла.

Результаты расчетов процессов идеального и теоретического циклов представлены на рис. 3.

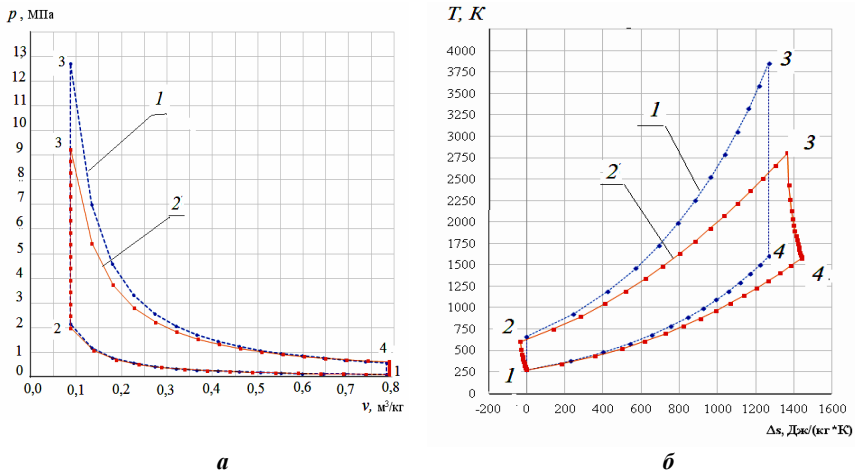


Рис. 3. Изображение термодинамических циклов в p, v - системе координат (а) и в $T, \Delta s$ -системе координат (б):
1- идеальный цикл Отто; 2 - теоретический расчетный цикл

Термический КПД теоретического цикла (показатель эффективности использования подводимой теплоты):

$$\eta_i = \frac{l_y}{q_1}, \quad (11)$$

где $l_y = l_{1-2} + l_{3-4}$ – полезная удельная работа цикла – сумма работ процессов сжатия и расширения; q_1 – количество подводимой теплоты.

Удельная работа процесса адиабатического сжатия в идеальном термодинамическом цикле:

$$l_{1-2} = -\frac{R}{k-1} \cdot (T_2 - T_1),$$

где k – показатель адиабаты воздуха.

Удельная работа процесса политропного сжатия в теоретическом термодинамическом цикле:

$$l_{1-2} = -\frac{R}{n_1-1} \cdot (T_2 - T_1),$$

где n_1 – показатель политропы сжатия воздуха.

Удельная работа процесса адиабатического расширения в идеальном термодинамическом цикле:

$$l_{3-4} = -\frac{R}{k-1} \cdot (T_4 - T_3).$$

Удельная работа процесса политропного расширения в теоретическом термодинамическом цикле:

$$l_{3-4} = -\frac{R}{n_2-1} \cdot (T_4 - T_3),$$

где n_2 – показатель политропы расширения.

Среднее давление теоретического цикла (показатель работоспособности):

$$p_i = \frac{l_y}{\Delta v_{1-2}}, \quad (12)$$

где Δv_{1-2} – рабочий удельный объем цилиндра.

Удельная (литровая) индикаторная мощность характеризует интенсивность совершения полезной работы цикла в единице рабочего объема в единицу времени:

$$N_{i\lambda} = \frac{p_i \cdot n}{60 \cdot \tau}, \quad (13)$$

где n – частота вращения вала отбора мощности; τ – коэффициент тактности (для четырехтактного цикла $\tau = 2$).

Удельный теоретический расход топлива представляет собой массу топлива, затраченную на получение из теплоты сгорания топлива единицы полезной работы:

$$g_{i(m)} = \frac{3600}{\eta_i \cdot H_u}. \quad (14)$$

Результаты расчета показателей эффективности использования подводимой теплоты и работоспособности идеального и теоретического циклов по уравнениям (11)–(14) представлены в табл. 8.

Таблица 8. Сравнение показателей идеального и теоретического циклов бензинового ДВС при $\varepsilon = 9$

Вид цикла	Термический КПД	Среднее давление, кПа	Литровая теоретическая мощность, при $n = 5000 \text{ мин}^{-1}$, кВт/л	Удельный эффективный расход топлива, кг/(кВт.ч)
Идеальный	58,5	1924	80,5	0,140
Теоретический	36,6	1868	77,8	0,223

Выводы. На основе моделирования реального состава газовой смеси выполнена аналитическая сравнительная оценка термических и энергетических параметров состояния рабочего тела в процессах и показателей эффективности и работоспособности идеального и теоретического термодинамических циклов. На примере цикла с изохорным подводом теплоты показано, что в теоретическом цикле за счет учета реального состава рабочего тела термический КПД и среднее давление имеют меньшие значения по сравнению с идеальным циклом.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения предложенного метода для оценки эффективности теплоиспользования и работоспособности других подобных термодинамических циклов тепловых двигателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Техническая термодинамика: учебник для машиностроительных специальностей вузов / под ред. В.И. Крутова. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1991. 384 с.
2. Цирельман Н.М. Техническая термодинамика: учебное пособие. 2-е изд., доп. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. 352 с.
3. Хейвуд Р.В. Анализ циклов в технической термодинамике: пер. с англ. М.: Энергия, 1979. 280 с.

4. Луканин В.Н. Промышленно-транспортная экология: учебник для вузов / В.Н. Луканин, Ю.В. Трофименко; под ред. В.Н. Луканина. М.: Высш. шк., 2003. 273 с.
5. Автомобильные двигатели / В.М. Архангельский, М.М. Вихерт, А.Н. Воинов [и др.]; под ред. В.Н. Ховаха. М.: Машиностроение, 1977. 591 с.
6. Гаврилов А.А. Расчет циклов поршневых двигателей: учеб. пособие / А.А. Гаврилов, М.С. Игнатов, В.В. Эфрос; Владимирский гос. ун-т. Владимир, 2003. 124 с.
7. Ивнев А.А. Расчет параметров и анализ термодинамических циклов поршневых двигателей: учеб.-метод. пособие к курс. работе по дисциплине "Термодинамика". Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. 75 с.
8. Состав отработавших газов двигателей внутреннего сгорания: метод пособие / сост. В.В. Алферович; Белорусский нац. техн. ун-т. Минск: БНТУ, 2011. 39 с.
9. Удельная теплота сгорания топлива и горючих материалов / Свойства веществ: Справочник THERMALINFO. URL: <http://thermalinfo.ru/eto-interesno/udelnaya-teplota-sgoraniya-topliva-i-goryuchih-materialov#teplota-sgoraniya-zhidkogo-topliva>

УДК 330.4

В. С. Королева

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: koroleva.vikt0ria@yandex.ru

ОЦЕНКА ДИНАМИКИ ВЛИЯНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ОБЩИЙ КОЭФФИЦИЕНТ РОЖДАЕМОСТИ

В статье предложен анализ степени влияния социально-экономических факторов на общий коэффициент рождаемости. Методом регрессионного анализа статистических данных за период с 2009 г. по 2022 г. по всем субъектам Российской Федерации были рассмотрены пятнадцать объясняющих переменных (регрессоров), которые отражают демографические, экономические и социальные факторы рождаемости. Для каждого года построены лаговые регрессионные модели, отобраны статистически значимые факторы, оценено направление их влияния (положительное или отрицательное).

Ключевые слова: рождаемость, эконометрическое моделирование, общий коэффициент рождаемости, математическая модель, регрессия, демография

V. S. Koroleva

S.A. Esenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: koroleva.vikt0ria@yandex.ru

ASSESSMENT OF THE DYNAMICS OF THE INFLUENCE OF ECONOMIC FACTORS ON THE TOTAL FERTILITY RATE

The article offers an analysis of the degree of influence of socio-economic factors on the overall fertility rate. Using the regression analysis of statistical data for the period from 2009 to 2022, fifteen explanatory variables (regressors) were considered for all subjects of the Russian Federation, reflecting demographic, economic and social factors of fertility. Lag regression models were built for each year, statistically significant factors were selected, and the direction of their influence (positive or negative) was estimated.

Keywords: fertility, econometric modeling, total fertility rate, mathematical model, regression, demography

Введение. В России в последние десятилетия наблюдается тенденция снижения рождаемости [1, 2] (рис. 1). С 2007 года действуют мера финансовой поддержки семей: материнский капитал за второго ребенка [3], а в 2020 году его начинают выплачивать и за первого ребенка тоже. Однако, несмотря на данные меры поддержки, с 2016 года начинается новый демографический спад.

В связи с актуальностью поиска решения демографической проблемы уже достаточно долго ведутся исследования влияния различных факторов на показатели рождаемости.

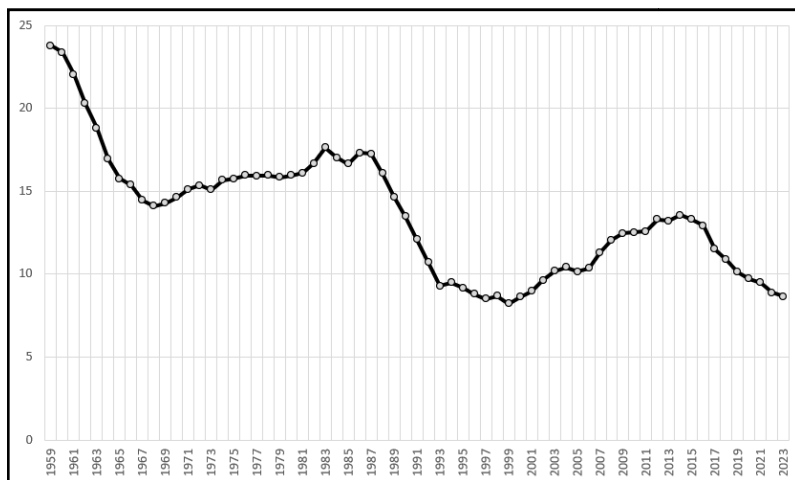


Рис. 1. Динамика общего коэффициента рождаемости по РФ

Обзор методологических подходов предложен в [1]. Кроме того, в этом исследовании с помощью анализа панельных данных за период с 2005 г. по 2017 г. исследовано влияние ряда социальных, демографических и экономических факторов (коэффициент брачности, ожидаемая продолжительность жизни при рождении, миграционный прирост, доля городского населения, коэффициент разводимости, число абортс на 100 родов, общая площадь жилых помещений, приходящаяся на одного жителя (м^2), численность населения на одну больничную койку, охват детей дошкольным образованием, индекс человеческого развития, реальные денежные доходы на душу населения по региональному паритету покупательной способности (руб./мес.), номинальный ВРП на душу населения (руб./год), уровень безработицы, доля населения с доходами ниже прожиточного минимума, коэффициент фондов (степень социального расслоения) на сум-

марный коэффициент рождаемости и на коэффициенты рождаемости по очередности рождения (первого, второго, третьего, четвертого и последующих детей)). Были выявлены статистически значимые факторы для каждого коэффициента рождаемости. При этом ни один из социально-экономических показателей в регионах России с 2005 г. не показывал достаточно устойчивой положительной динамики, чтобы можно было говорить о существовании устойчивого положительного или отрицательного влияния на коэффициенты рождаемости первого и последующих детей.

В работе [3] представлены результаты анализа зависимости общего коэффициента рождаемости от среднедушевых доходов населения в федеральных округах в период с 2000 по 2006 гг. (период низкого плато общего коэффициента рождаемости). В статье [4] предложен сравнительный анализ факторов, влияющих на репродуктивное поведение семей, в 2007 и в 2014 гг., в тот период общий и суммарный коэффициенты рождаемости показывали тенденцию роста. В работе [5] рассмотрен период с 2007 г. по 2021 г. Исследованы региональные различия в значении общего и суммарного коэффициентов рождаемости, выполнена классификация регионов по паре факторов: заработная плата – общий коэффициент рождаемости.

Из анализа предшествующих исследований следует, что в различные периоды одни и те же социально-экономические факторы влияли на коэффициенты рождаемости по-разному. При этом появление новых статистических данных и меры по реализации национального проекта «Демография» [5] могут оказать существенное влияние на взаимосвязь социально-экономических факторов и коэффициентов рождаемости. Поэтому оценка влияния экономических факторов на рождаемость на основе новых статистических данных является актуальной.

Постановка задачи. В данном исследовании в качестве объясненной переменной Y выбран общий коэффициент рождаемости (отношение числа родившихся живыми в течение года к среднегодовой численности населения), поскольку этот коэффициент позволяет оценить динамику деторождения в РФ в краткосрочной перспективе. Предполагается, что на общий коэффициент рождаемости влияют уровень жизни населения, уровень доступности дошкольного и школьного образования, положение на рынке труда и уровень здравоохранения. В связи с этими предположениями будут использоваться следующие факторы:

- X_1 – среднедушевые денежные доходы, руб.;
- X_2 – среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций, руб.;
- X_3 – средний размер назначенных пенсий, руб.;

– X_4 – величина прожиточного минимума, установленная в целом по Российской Федерации и в субъектах Российской Федерации в 4-м квартале 2001–2020 гг., руб.;

– X_5 – число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения, шт.;

– X_6 – потребление мяса и мясопродуктов, кг (включая субпродукты II категории и жир-сырец) на душу населения;

– X_7 – потребление молока и молочных продуктов, кг, на душу населения;

– X_8 – численность учителей организаций, осуществляющих образовательную деятельность по образовательным программам начального, основного и среднего общего образования, тыс. чел.;

– X_9 – численность воспитанников организаций, осуществляющих образовательную деятельность по образовательным программам дошкольного образования, присмотр и уход за детьми, тыс. чел.;

– X_{10} – удельный вес расходов домашних хозяйств на оплату жилищно-коммунальных услуг в процентах от общей суммы потребительских расходов, %;

– X_{11} – объем средств, предусмотренных на предоставление гражданам социальной поддержки по оплате жилого помещения и коммунальных услуг, млн руб.;

– X_{12} – численность населения на одну больничную койку, чел.;

– X_{13} – мощность амбулаторно-поликлинических организаций, тыс. посещений в смену;

– X_{14} – численность населения на одного врача, чел.;

– X_{15} – численность зарегистрированных безработных, тыс. чел.

Ставится задача: оценить влияние факторов X_1 – X_{15} на величину общего коэффициента рождаемости, выявить статистически значимые факторы за период с 2010 по 2023 г.

Описание данных. На основании предположений и построенной логической модели были собраны данные по всем регионам РФ за период с 2009 по 2021 г. [6] для факторов X_1 – X_{15} и по объясненной переменной Y с 2010 по 2022 г. С 2009 по 2014 г. данные для факторов X_1 – X_{15} содержат 80 регионов (аналогично для Y – с 2010 по 2015 г.). В связи с от-

сутствием некоторых данных использовались интегральные показатели без учета субрегионов для Архангельской и Тюменской областей. С 2015 г. (с 2016 г. для Y) добавлены данные по республике Крым и г. Севастополю. При построении регрессионной модели данные по факторам $X_1 - X_{15}$ были взяты с отставанием (лагом) от объясненной переменной Y . Это обусловлено тем, что, во-первых, необходимо избежать эндогенности в регрессионном уравнении, а во-вторых, лаг обоснован спецификой модели (в общем коэффициенте рождаемости учтены фактические рождения, а решение о рождении ребенка принимается примерно за год до рождения). Все вычисления выполнены на уровне значимости 0,05. В таблицах и на рисунках годы указаны для объясненной переменной Y , а в тексте – для регрессоров $X_1 - X_{15}$.

Результаты исследования. На первом этапе исследования для каждого года рассматриваемого периода были проанализированы диаграммы рассеяния и вычислены матрицы выборочных коэффициентов парной линейной корреляции с целью выявления линейной зависимости Y от выбранных факторов. Выявилась умеренная линейная зависимость Y от факторов X_5 (число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения), X_{10} (удельный вес расходов домашних хозяйств на оплату жилищно-коммунальных услуг в процентах от общей суммы потребительских расходов) и X_{15} (численность зарегистрированных безработных). Соответствующие коэффициенты парной линейной корреляции между данными факторами и объясняемой переменной по модулю больше 0,4. Для других факторов коэффициенты корреляции меньше, поэтому можно предположить, что зависимость либо отсутствует, либо она нелинейная.

На втором этапе для каждого года периода наблюдения были оценены коэффициенты уравнений множественной линейной регрессии вида

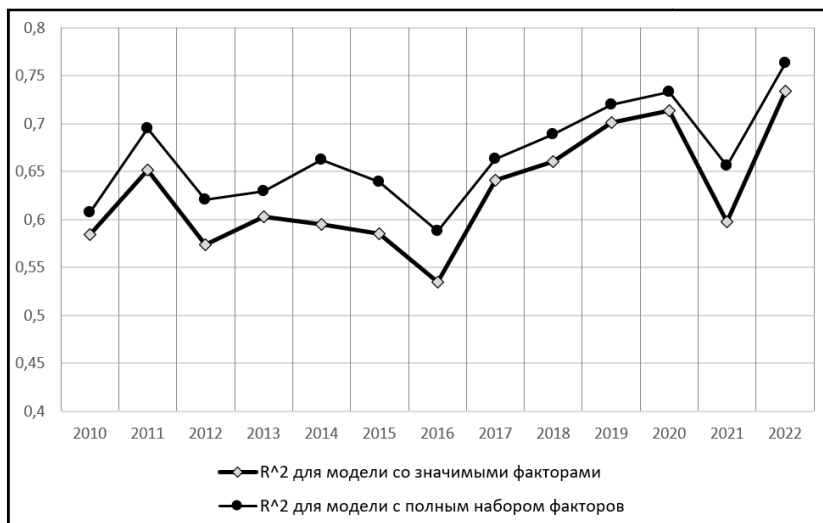
$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{15} a_i X_i + \varepsilon. \quad (1)$$

Далее проверялось условие независимости факторов между собой, после чего для улучшения модели использовался метод исключения взаимозависимых факторов. Затем были оценены коэффициенты и статистические характеристики уравнений регрессии, содержащих только значимые факторы. Соответствующие коэффициенты детерминации R^2 и статистически значимые факторы для уравнений регрессии каждого года приведены в таблице 1, из которой следует, что факторы X_4 , X_6 , X_7 , X_8 и X_{11}

оказались статистически незначимыми в каждом году периода наблюдения; факторы X_2 , X_{10} и X_{15} значимы для каждого года, а факторы X_1 , X_3 , X_5 и X_{13} – значимы почти для каждого года. Особенную динамику представляет влияние фактора X_1 , который действовал в 2009 и 2010 гг., а также действует постоянно в период с 2015 по 2021 год; и влияние фактора X_9 , который действовал постоянно в период с 2012 по 2016 год. Динамика R^2 для уравнения (1) и уравнения с наилучшим набором факторов отражена на рис. 2.

Таблица 1. Динамика статистически значимых факторов

Год	R^2 для уравнения (1)	R^2 для наилучшего уравнения	Значимые факторы
2010	0,6077	0,5844	$X_1, X_2, X_3, X_5, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2011	0,6954	0,6517	$X_1, X_2, X_5, X_{10}, X_{12}, X_{15}$
2012	0,6204	0,5734	$X_2, X_3, X_5, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2013	0,6297	0,6031	$X_2, X_3, X_5, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{14}, X_{15}$
2014	0,6619	0,5949	$X_2, X_3, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2015	0,6397	0,5855	$X_2, X_3, X_5, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2016	0,5878	0,5352	$X_1, X_2, X_3, X_5, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2017	0,6634	0,6413	$X_1, X_2, X_3, X_5, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2018	0,6893	0,6610	$X_1, X_2, X_3, X_5, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2019	0,7199	0,7011	$X_1, X_2, X_3, X_5, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2020	0,7329	0,7139	$X_1, X_2, X_3, X_5, X_9, X_{10}, X_{13}, X_{15}$
2021	0,6562	0,5974	$X_1, X_2, X_5, X_{10}, X_{15}$
2022	0,7634	0,7337	$X_1, X_2, X_5, X_{10}, X_{13}, X_{15}$

Рис. 2. Динамика коэффициентов R^2

В таблицах 2 и 3 представлены значения коэффициентов статистически значимых факторов уравнения (1) в каждом году наблюдаемого периода, из которых следует, что положительное влияние на общий коэффициент рождаемости оказывают факторы: среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций (X_2), численность воспитанников организаций, осуществляющих образовательную деятельность по образовательным программам дошкольного образования, присмотр и уход за детьми (X_9), численность зарегистрированных безработных (X_{15}). Отрицательное влияние оказывают факторы: среднедушевые денежные доходы (X_1), средний размер назначенных пенсий (X_3), число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения (X_5), удельный вес расходов домашних хозяйств на оплату жилищно-коммунальных услуг в процентах от общей суммы потребительских расходов, % (X_{10}), мощность амбулаторно-поликлинических организаций, тыс. посещений в смену (X_{13}). Следует отметить, что по факторам, общим с исследованием [1], направление влияния этих факторов не изменилось.

Таблица 2. Значения коэффициентов наилучшего уравнения для регрессоров, действующих постоянно или почти постоянно

Год	a_0	a_2	a_3	a_5	a_{10}	a_{13}	a_{15}
2010	28,85		-0,0031	-0,0193	-0,6418	-0,0315	0,0736
2011	17,35	0,0006	-0,0201	-0,0201	-0,6888		0,0333
2012	26,69	0,0002	-0,0012	-0,0168	-0,5101	-0,0207	0,0341
2013	30,18	0,0007	-0,0015	-0,0120	-0,5046	-0,0587	0,0479
2014	25,49	0,0002	-0,0013		-0,6948	-0,0537	0,0602
2015	23,61	0,0002	-0,0009	-0,0088	-0,4668	-0,0506	0,0635
2016	17,35	0,0002		-0,0068	-0,4322	-0,0306	0,0877
2017	20,22	0,0003	-0,0007	-0,0070	-0,3732	-0,0437	0,1337
2018	19,21	0,0002	-0,0006	-0,0085	-0,2978	-0,0229	0,1621
2019	17,54	0,0002	-0,0006	-0,0071	-0,2709	-0,2709	0,1785
2020	19,77	0,0002	-0,0007	-0,0097	-0,2942	-0,0442	0,1686
2021	16,18	0,0001		-0,0104	-0,5336		0,0260
2022	11,55	0,0001		-0,0057	-0,3564	-0,0184	0,1898

Таблица 3. Значения коэффициентов наилучшего уравнения, для регрессоров, действующих с особенной динамикой

Год	a_1	a_4	a_9	a_{12}	a_{14}
2010	$-4,5 \cdot 10^{-4}$				
2011	$-6,4 \cdot 10^{-4}$	0,0003		0,0423	
2012					
2013			0,0253		-0,0130
2014			0,0189		
2015			0,0215		
2016	$-1,6 \cdot 10^{-4}$		0,0141		
2017	$-1,1 \cdot 10^{-4}$		0,0118		
2018	$-1,1 \cdot 10^{-4}$				
2019	$-9,8 \cdot 10^{-5}$				
2020	$-8,2 \cdot 10^{-5}$		0,0129		
2021	$-1,4 \cdot 10^{-4}$				
2022	$-8,9 \cdot 10^{-5}$				

Закключение. В результате данного исследования были отобраны факторы, статистически значимо влияющие на общий коэффициент рождаемости. В дальнейшем предполагается построить на этих факторах панель и исследовать региональные различия и скрытые временные эффекты, оказывающие значимое влияние на объясненную переменную.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трынов А.В.* Исследование социально-экономической детерминации рождаемости на основе анализа региональных панельных данных / А.В. Трынов, С.Н. Костина, Г.А. Банных // Экономика региона. 2020. Т. 16, вып. 3. С. 807–819. URL: <https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2020–3–10>.
2. *Лискина Е.Ю.* Математическая модель демографических волн на примере населения Российской Федерации / Е.Ю. Лискина // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2020: сборник трудов III Международного научно-технического форума: в 10 т. Т. 5. Рязань: Изд-во РГРТУ, 2020. С. 42–47.
3. *Полулях Ю.Г.* Анализ зависимости общего коэффициента рождаемости от среднедушевых денежных доходов населения в федеральных округах / Ю.Г. Полулях, Е.А. Мамаш, Т.М. Ойдуп // Региональная экономика: теория и практика. 2009. № 18 (111). С. 44–51.
4. *Проказина Н.В.* Особенности демографического развития в Центральном федеральном округе Российской Федерации / Н.В. Проказина, Л.М. Перевозкин // Среднерусский вестник общественных наук. 2016. Т. 11, № 1. С. 18–27.
5. *Долгих Е. А.* Статистический анализ региональных различий рождаемости населения в Российской Федерации / Е.А. Долгих, Л.А. Давлетшина // Устойчивость демографического развития: детерминанты и ресурсы: сборник научных статей. Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2024. С. 374–382.
6. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2010–2023 гг. // Федеральная служба государственной статистики: [сайт]. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (дата обращения: 14.11.2024 г.).

УДК 330.4

Е. Ю. Лискина, И. В. Ефименко

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: katelis@yandex.ru

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ Р. СОЛОУ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассмотрена модель Р. Солоу с непрерывным и с дискретным временем. С использованием статистических данных Российской Федерации идентифицированы коэффициенты модели с дискретным временем, на их основе получены коэффициенты модели с дискретным временем. Построены примеры сценариев развития модели с идентифицированными коэффициентами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, динамическая модель, модель Р. Солоу, модель односекторной экономики, идентификация, регрессия

E. Y. Liskina, I. V. Efimenko

S.A. Esenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: katelis@yandex.ru

IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF R. SOLOW'S DISCRETE-TIME MODEL

The R. Solow model with continuous and discrete time is considered. Using statistical data from the Russian Federation, the coefficients of the discrete-time model were identified, and the coefficients of the discrete-time model were obtained based on them. Examples of scenarios for the development of the model with identified coefficients are constructed.

Keywords: differential equations, dynamic model, R. Solow model, single-sector economy model, identification, regression

Введение. В работе [1] была предложена модель экономического роста

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + \sigma F(K, L), \\ \dot{L} = \nu L, \end{cases} \quad (1)$$

в которой K – капитал (стоимость основных фондов экономики); L – труд (среднегодовая численность занятых в экономике); $F(K, L)$ – произ-

водственная функция; $\sigma \in [0; 1)$ – норма накопления основного капитала), $\mu \in (0; 1)$ – норма амортизации; $\nu \in (-1; 1)$ – коэффициенты прироста занятых.

В работе [1] Р. Солоу исследовал динамику модели (1) в двух случаях: случае линейной функции $F(K, L) = \alpha_1 K + \alpha_2 L$ и мультипликативной производственной функции вида $F(K, L) = \sqrt{KL}$. В работах [2–5] были рассмотрены различные модификации модели Р. Солоу с непрерывным временем, в которых изменения касались уравнения динамики труда, вида производственной функции и включения в модель новых факторов, например, нейтрального технического прогресса или конечного потребления. При этом в статьях [4, 5] предлагалась численная оценка параметров модели на примере Российской Федерации. В исследованиях [6, 7] был рассмотрен дискретный аналог модели (1) с модифицированной производственной функцией Аллена и учетом сальдо инвестиций и налогов, получена численная оценка коэффициентов модели. Следует отметить, что изменение экономических условий, приводящее к изменению параметров модели, делает актуальной задачу идентификации параметров модели и исследования поведения траекторий системы (1) в новых условиях.

Постановка задачи. Рассмотрим модель (1). Так как в классической модели производственных функций предполагается, что $Y = F(K, L)$, где Y – национальный доход или валовой региональный продукт, то с целью идентификации нормы накопления σ в системе (1) заменим $F(K, L)$ на Y . Используя эквивалентные величины для непрерывного и дискретного времени (см., например [8, с. 97]), построим эквивалентную дискретную модель Р. Солоу в виде

$$\begin{cases} K_{t+1} = (1 - \mu)K_t + \sigma Y_t, \\ L_{t+1} = (1 + \nu)L_t. \end{cases} \quad (2)$$

Задача. Идентифицировать коэффициенты $(1 - \mu)$, σ , $(1 + \nu)$ системы (2) на основе статистических данных по Российской Федерации.

Отметим, что Р. Солоу исследовал модель (1) при найденном решении второго уравнения системы (1) в виде $L = L_0 e^{\nu t}$. В нашем случае целесообразно рассмотреть решение задачи Коши $L(t_0) = L_0$ второго уравнения в виде $L = L_0 e^{\nu(t-t_0)}$. Отсюда следует

Задача 2. Идентифицировать коэффициент ν на основе уравнения $L = L_0 e^{\nu(t-t_0)}$.

Также будет рассматриваться и

Задача 3. Идентифицировать производственную функцию в виде $F(K, L) = \alpha_1 K + \alpha_2 L$ и в виде $F(K, L) = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$.

Описание данных. Для идентификации коэффициентов системы (2) были собраны статистические данные по Российской Федерации [9–11] за период с 2020 по 2023 год по стоимости основных фондов K и за период с 2000 по 2022 г. по труду L и валовому региональному продукту Y . Для идентификации параметров модели использовались данные с 2000 по 2022 г. для K и с 2000 по 2021 для L и Y . Расчеты проводились с помощью табличного процессора MS Excel на уровне значимости 0,05. Результаты описательности статистики для данных с 2000 по 2022 г. представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты описательной статистики для K , L и Y

Характеристика	K	L	Y
Среднее	144832681,5	69354,9	51661734,9
Стандартная ошибка	26450944,7	576,2	7954073,71
Медиана	108001247	70817,9	45392276,7
Стандартное отклонение	126854274,4	2763,5	38146397,4
Дисперсия выборки	$1,6 \cdot 10^{16}$	7637062,4	$1,4 \cdot 10^{15}$
Экссесс	0,2239	-1,49	-0,2036
Асимметричность	1,14	-0,4264	0,7325
Интервал	409937175	7908,3	134917144,9
Минимум	17464172	64516,6	5753671,6
Максимум	427401347	72424,9	140670816,5
Счет	23	23	23

Так как система (2) представляет собой систему независимых уравнений [12, с. 252], то ее коэффициенты могут быть идентифицированы методом наименьших квадратов.

Идентификация коэффициентов первого уравнения системы (2). На первом этапе был проведен визуальный анализ зависимостей K_{t+1} от K_t и Y_t с использованием диаграмм рассеяния (рис. 1 и рис. 2), кото-

рый позволил предположить наличие линейных зависимостей между K_{t+1} и K_t , K_{t+1} и Y_t . Таким образом, будем оценивать параметры регрессионного уравнения

$$K_{t+1} = (1 - \mu)K_t + \sigma Y_t + \varepsilon. \quad (2.1)$$

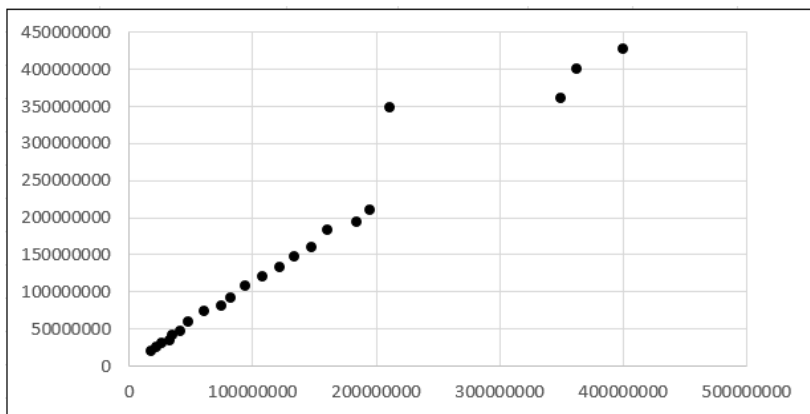


Рис. 1. Диаграмма рассеяния K_{t+1} и K_t

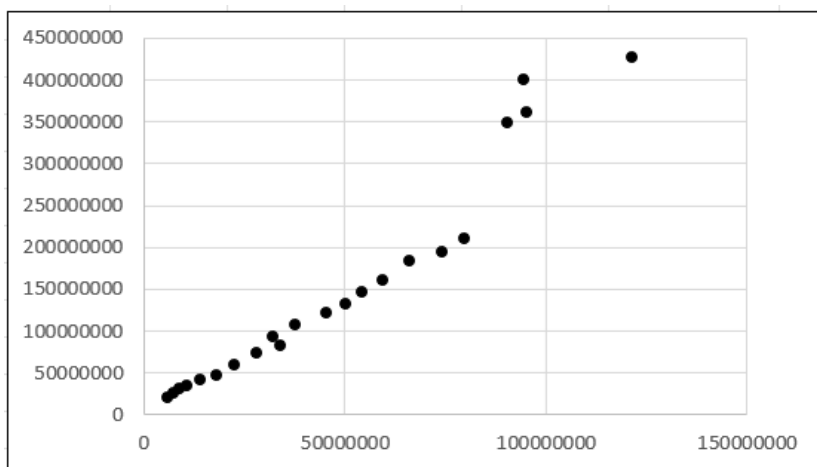


Рис. 2. Диаграмма рассеяния K_{t+1} и Y_t

Для того чтобы оценить статистическую значимость разрыва в данных, вместе с первым уравнением системы (2) оценивались уравнения с фиктивными переменными следующего вида:

$$K_{t+1} = (1 - \mu)K_t + \sigma Y_t + \gamma_1 z_K + \gamma_2 z_Y + \varepsilon, \quad (3)$$

$$K_{t+1} = (1 - \mu)K_t + \sigma Y_t + \gamma_1 z_K + \varepsilon, \quad (4)$$

$$K_{t+1} = (1 - \mu)K_t + \sigma Y_t + \gamma_2 z_Y + \varepsilon. \quad (5)$$

Статистические характеристики уравнения (2.1) и (3)–(5) приведены в таблице 2, из которой следует, что только у уравнения (2.1) все коэффициенты являются статистически значимыми. Остальные статистические характеристики уравнений (2.1) и (3)–(5) являются хорошими и численно эквивалентными. Поэтому для последующего исследования следует выбрать уравнение (2.1), которое после идентификации приняло вид

$$K_{t+1} = 0,7621K_t + 1,0910Y_t + \varepsilon. \quad (2.1^*)$$

Таблица 2. Статистические характеристики регрессионных уравнений (2.1), (3)–(5)

Характеристика	Уравнение (2.1)	Уравнение (3)	Уравнение (4)	Уравнение (5)
R^2	0,9867	0,9996	0,9978	0,9961
Значимость F-статистики	$9,4 \cdot 10^{-19}$	$3,1 \cdot 10^{-29}$	$2,3 \cdot 10^{-24}$	$4,6 \cdot 10^{-22}$
Значимость $(1 - \mu)$	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	0,4180	0,2008
Стандартная ошибка $(1 - \mu)$	0,1477	0,1075	0,0926	0,1670
Доверительный интервал $(1 - \mu)$	(0,4541; 1,0702)	(0,8068; 1,2585)	(-0,1172; 0,2705)	(-0,5709; 0,1282)
Значимость σ	0,0222	0,4992	$1,5 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$
Стандартная ошибка σ	0,4401	0,2612	0,2315	0,4015
Доверительный интервал σ	(0,1729; 2,0092)	(-0,3692; 0,7301)	(2,0127; 2,9820)	(2,4032; 4,0840)
Значимость z_K	–	$9,1 \cdot 10^{-11}$	$6,5 \cdot 10^{-9}$	–
Значимость z_Y	–	$1,8 \cdot 10^{-8}$	–	$1,8 \cdot 10^{-6}$
Средняя ошибка аппроксимации	0,0774	0,0394	0,0712	0,0891

Проверка условий Гаусса – Маркова для уравнения (2.1*) показала, что условия о нормальном распределении остатков и о постоянстве дисперсий (по G-критерию Кохрана [13]) не выполнены, условие о равенстве математического ожидания остатков нулю не может быть проверено по критерию Стьюдента, а условия о независимости остатков между собой и о независимости остатков и наблюдений выполнены. Графики наблюдаемых и модельных значений K_{t+1} , полученных с помощью уравнения (2.1*), представлены на рис. 3.

Идентификация параметров второго уравнения системы (2).

Функция $L = L_0 e^{\nu(t-t_0)}$, являющаяся решением задачи Коши второго уравнения системы (1), была преобразована к виду $L = e^{\nu t + (\ln L_0 - \nu t_0)}$. Далее были оценены параметры уравнений

$$L_{t+1} = (1 + \nu) L_t + \varepsilon, \quad (2.2)$$

$$L = e^{\nu t + (\ln L_0 - \nu t_0)} + \varepsilon. \quad (6)$$

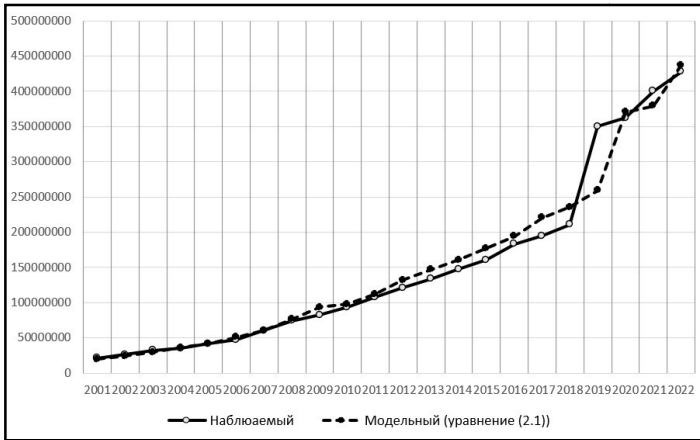


Рис. 3. Наблюдаемые и модельные значения K_{t+1}

Статистические характеристики для выбора наилучшего уравнения приведены в таблице 3, из которой следует, что у уравнения (6) статистически незначимым является коэффициент $e^{(\ln L_0 - \nu t_0)}$, поэтому лучшим по статистическим характеристикам является уравнение (2.2). С учетом идентифицированного коэффициента $(1 + \nu)$ оно приняло вид

$$L_{t+1} = 1,0042 L_t + \varepsilon. \quad (2.2*)$$

Таблица 3. Статистические характеристики регрессионных уравнений (2.2) и (6)

Характеристика	Уравнение (2.2)	Уравнение (6)	
R^2	0,9998	0,6736	
Значимость F-статистики	$2,1 \cdot 10^{-38}$	$9,4 \cdot 10^{-7}$	
Коэффициент	$(1 + \nu)$	ν	$e^{(\ln L_0 - \nu t_0)}$
Значимость коэффициента	$4,9 \cdot 10^{-40}$	$9,4 \cdot 10^{-7}$	0,3979
Стандартная ошибка	0,0032	0,0007	1,
Доверительный интервал	(0,9975; 1,0108)	(0,0034; 0,0064)	(-1,7627; 4,2632)
Средняя ошибка аппроксимации	0,0084	0,0394	

Проверка условий Гаусса – Маркова для уравнения (2.2*) показала, что условие о нормальном распределении остатков не выполнено, условие о равенстве математического ожидания остатков нулю не может быть проверено по критерию Стьюдента, а условия о независимости остатков между собой, о независимости остатков и наблюдений и условие о постоянстве дисперсий выполнены.

Графики наблюдаемых и модельных значений, полученных с помощью уравнения (2.2*), приведены на рис. 4.

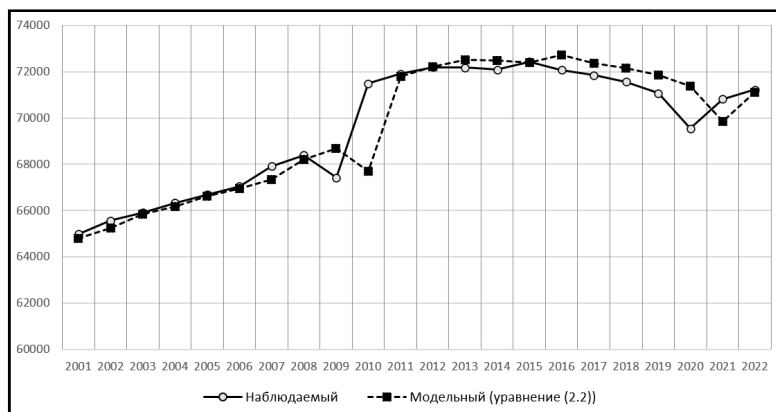


Рис. 4. Наблюдаемые и модельные значения L_{t+1}

Идентификация производственной функции. Для идентификации производственных функций

$$F(K, L) = \alpha_1 K + \alpha_2 L \text{ и } F(K, L) = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$$

были использованы регрессионные уравнения

$$Y_t = \alpha_1 K_t + \alpha_2 L_t + \varepsilon, \quad (7)$$

$$Y_t = \alpha_0 K_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2} + \varepsilon. \quad (8)$$

Статистические характеристики для выбора наилучшего уравнения из уравнений (7) и (8), а также результаты проверки условий Гаусса – Маркова приведены в таблице 4, из которой следует, что оба уравнения являются статистически значимыми, имеют близкие статистические характеристики. После идентификации они выглядят следующим образом:

$$Y_t = 0,2790K_t + 159,0612L_t + \varepsilon, \quad (7^*)$$

$$Y_t = 3,5 \cdot 10^{-22} K_t^{0,7995} L_t^{4,6918} + \varepsilon. \quad (8^*)$$

При этом для прогноза, выполненного с помощью уравнения (7*), можно построить доверительный интервал. Графики наблюдаемых и модельных значений Y_t , полученных с помощью уравнений (7*) и (8*), приведены на рис. 5. Графики функций $F(K, L) = \alpha_1 K + \alpha_2 L$ и $F(K, L) = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$ с коэффициентами из (7*) и (8*) представлены на рис. 6 и 7 соответственно.

Таблица 4. Статистические характеристики регрессионных уравнений (7) и (8)

Уравнение	Уравнение (7)	Уравнение (8)
R^2	0,9752	0,9676
Значимость F-статистики	$3,5 \cdot 10^{-16}$	$4,8 \cdot 10^{-17}$
Значимость α_1	$3,2 \cdot 10^{-12}$	$3,1 \cdot 10^{-11}$
Значимость α_2	0,0029	0,0022
Значимость α_0	–	0,0021
Средняя ошибка аппроксимации	0,20	0,10
Условие о нормальном распределении остатков	выполнено	не выполнено
Условие $M(\varepsilon) = 0$	выполнено	не может быть проверено
Условие $D(\varepsilon) = \text{const}$	не выполнено	не выполнено
Условие $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$	не выполнено	выполнено
Условие $\text{Cov}(\varepsilon_i, K_i) = 0$	выполнено	не выполнено
Условие $\text{Cov}(\varepsilon_i, L_i) = 0$	не выполнено	выполнено

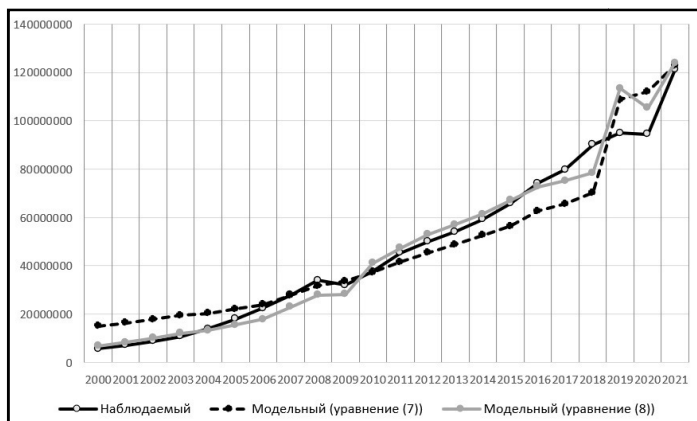


Рис. 5. Наблюдаемые и модельные значения Y_t

Результаты. Из уравнений (2.1*) и (2.2*) получили, что точечные оценки коэффициентов уравнения (1) имеют вид $\mu = 0,2379$, $\sigma = 1,0910$, $\nu = 0,0042$. Полученное значение коэффициента σ не соответствует условию замкнутой экономики, в которой $\sigma \in [0; 1)$. Однако значение, превышающее единицу, может быть интерпретировано как наличие внешних инвестиций в основной капитал. На рис. 8 и 9 представлены сценарии развития экономики в соответствии с моделью (1) и при начальных значениях K и L , соответствующих 2000, 2011 и 2022 гг.

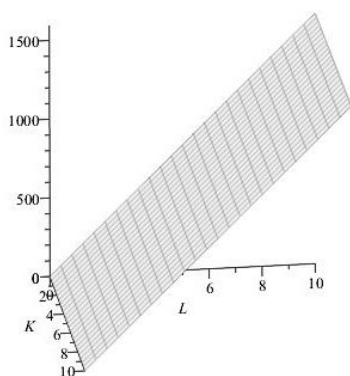


Рис. 6. График функции (7*)

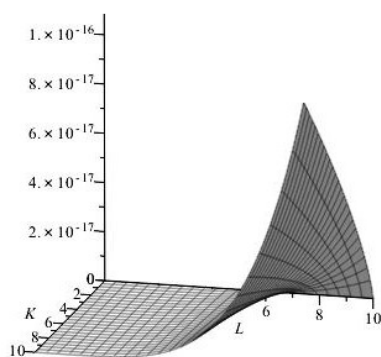


Рис. 7. График функции (8*)

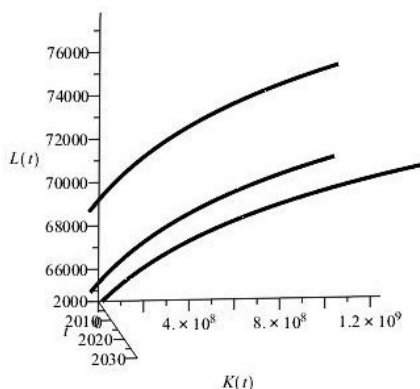


Рис. 8. Траектории системы (1) с производственной функцией (7*)

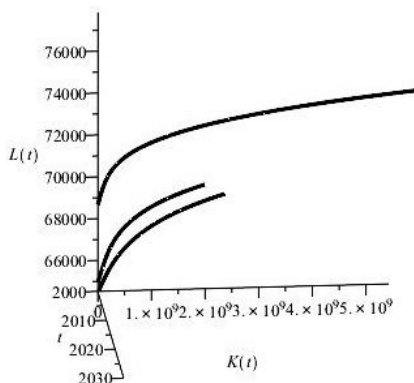


Рис. 9. Траектории системы (1) с производственной функцией (8*)

После публикации новых статистических данных за 2023 год планируется проверка адекватности уравнений (2.1*), (2.2*), (7*), (8*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70, no. 1. Pp. 65–94.
2. Тихонова А.Д. О колебаниях фондов в модели Солоу / А.Д. Тихонова, В.В. Абрамов // Математика и естественные науки: теория и практика. Вып. 14. Ярославль: Издательский дом ЯГТУ, 2019. С. 56–60.
3. Абрамов В.В. Стационарные состояния в модели односекторной экономики // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 2. Рязань: Рязанский гос. ун-т имени С.А. Есенина, 2021. С. 4–9.
4. Лазарева И.А. Построение и идентификация односекторной модели экономики региона, учитывающей конечное потребление и конкуренцию за ограниченные ресурсы / И.А. Лазарева, Е.Ю. Лискина // Вестник РАЕН. 2016. Т. 16, № 3. С. 36–40.
5. Лискина Е.Ю. Качественное и численное исследование односекторной модели экономики региона / Е.Ю. Лискина, С.А. Нелюхин // Вестник РАЕН, 2016. Т. 16, № 3. С. 41–47.
6. Попель С.А. Построение динамической модели экономики региона с дискретным временем, модифицированной производственной функцией Аллена и конкуренцией за ресурс рабочих мест / С.А. Попель, Е.Ю. Лискина // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. 2022. № 7. С. 270–275.
7. Лискина Е.Ю. Идентификация параметров динамической модели односекторной экономики с дискретным временем / Е.Ю. Лискина, С.А. Попель // Математика

- и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 107–112.
8. *Симонов П.М.* Экономико-математическое моделирование: учеб. пособие: в 2 ч. Пермь, 2019. Ч. 1. 3,45 Мб; 230 с. URL: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/economiko-matematicheskoe-modelirovanie-simonov-1.pdf>.
 9. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2010–2023 гг. // Федеральная служба государственной статистики: [сайт]. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (дата обращения: 04.10.2024 г.).
 10. Национальные счета // Федеральная служба государственной статистики: [сайт]. URL: <https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts> (дата обращения: 04.10.2024 г.).
 11. Основные фонды и другие нефинансовые активы // Федеральная служба государственной статистики: [сайт]. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/14304> (дата обращения: 30.11.2024 г.).
 12. Эконометрика: учебник / под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2007. 344 с.
 13. *Ребро И.В.* Прикладная математическая статистика для технических специальностей: учеб. пособие / И.В. Ребро, В.А. Носенко, Н.Н. Короткова; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. Волгоград: ИУНЯ ВолгГТУ, 2011. 149 с.

УДК 004.934

О. Ю. Марьясин, А. В. Рипнягов

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: maryasinou@ystu.ru, ripniagov.work@yandex.ru

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ГОЛОСОВОЙ АССИСТЕНТ

Рассмотрено применение голосовых ассистентов для управления различными устройствами на производстве. Предложена архитектура голосовых ассистентов, ориентированных на взаимодействие с промышленными объектами. Основное внимание в работе уделяется проблеме классификации текста команд, полученных путем распознавания речи в условиях шума. Для распознавания команд применялись различные методы нечеткого сравнения строк, сравнение строк по косинусному расстоянию и модель машинного обучения. Показано, что применение моделей машинного обучения является наиболее надежным способом распознавания текста команд в условиях шума.

Ключевые слова: голосовой ассистент, распознавание речи, классификация текста, нечеткое сравнение строк, машинное обучение, синтез речи

O. Yu. Maryasin, A. V. Ripnyagov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru, ripniagov.work@yandex.ru

INDUSTRIAL VOICE ASSISTANT

The article discusses the use of voice assistants to control various devices in production. An architecture of voice assistants aimed at interaction with industrial objects is proposed. The main focus of the work is on the problem of classifying the text of commands obtained by speech recognition in noisy conditions. Various methods of fuzzy string comparison, string comparison by cosine distance and a machine learning model were used to recognize commands. It is shown that the use of machine learning models is the most reliable way to recognize the text of commands in noisy conditions.

Keywords: voice assistant, speech recognition, text classification, fuzzy string comparison, machine learning, speech synthesis

Введение. Голосовой ассистент (ГА), или голосовой помощник – это программное обеспечение, которое позволяет пользователям взаимодействовать с различными техническими устройствами с помощью голосовых команд. В качестве устройств могут выступать смартфоны, планшеты, компьютеры, умные колонки, бытовые приборы, автомобили и т.д. ГА

использует технологии распознавания речи для обработки голосовых команд и выполнения нужных действий. Важно отметить, что развитие ГА стало возможным благодаря внедрению искусственного интеллекта (ИИ) и машинного обучения (МО). Эти технологии позволили ГА обучаться и адаптироваться к запросам пользователей, делая их все более умными и способными [1].

К настоящему времени создано множество ГА, которые отличаются по своим характеристикам и функциональным возможностям. По возможности использования сети Интернет ГА можно разделить на следующие группы:

1) Онлайн ГА, которые для своей работы требуют наличия Интернет-соединения. Недостатками онлайн ГА являются:

- Для полноценной работы онлайн ГА требуется надежное и быстрое Интернет-соединение. Если соединение нестабильно или отсутствует, то функциональность ГА резко снижается или совсем исчезает. Из-за необходимости передачи данных через сеть Интернет возможны задержки в ответах ГА.

- Онлайн ГА передают данные о запросах и командах пользователя на удалённые серверы для обработки. Это создаёт потенциальные угрозы для конфиденциальности, поскольку данные могут быть использованы ненадлежащим образом.

- Как и любые онлайн-сервисы, ГА подвержены риску хакерских атак и других видов киберпреступлений. Взлом аккаунтов или перехват данных могут привести к серьёзным последствиям для пользователей.

2) Офлайн ГА, которые могут работать автономно и не требуют наличия интернет-соединения. Недостатками офлайн ГА являются:

- Автономные ГА обычно имеют меньше возможностей по сравнению с онлайн-версиями. Они могут выполнять базовые функции, такие как установка будильника, включение музыки или управление освещением, но сложные задачи, требующие доступа к внешним данным (например, поиск информации в сети Интернет), им недоступны.

- Устройства, на которых работают офлайн ГА, могут иметь ограниченные аппаратные ресурсы, что сказывается на возможностях ГА, таких как качество распознавания и синтеза речи, возможности по обучению и адаптации к потребностям пользователя.

3) ГА, которые могут работать как в онлайн-, так и офлайн-режиме. Такие ГА могут сочетать достоинства онлайн- и офлайн-вариантов и избегать их недостатков.

В данной работе рассматриваются вопросы разработки ГА с поддержкой русского языка, ориентированных на управление различными устройствами на производстве, в рамках подхода Индустрия 4.0 [2]. Учи-

тывая важность для промышленных приложений таких показателей как надежность, быстрота реакции и конфиденциальность данных далее будут рассматриваться только ГА второй и третьей групп, т.е. автономные ГА или ГА, которые могут работать как в онлайн-, так и офлайн-режиме. При этом основное внимание в работе уделяется проблеме классификации текста, полученного путем распознавания речи в условиях шума. Данной проблеме, по мнению авторов, пока уделяется очень мало внимания в научной литературе.

1. Архитектура ГА. Авторы полагают, что архитектура ГА, ориентированных на взаимодействие с промышленными объектами должна включать следующие основные блоки (рис. 1):

- блок шумоподавления (БШ);
- блок обнаружения голосовой активности (БОГА) и блок обнаружения триггерного, «пробуждающего» (wakeword) слова (БОТС);
- блок распознавания речи (БРР) и преобразования аудио сигнала с микрофона в текст (Speech-To-Text – STT);
- блок распознавания (классификации) текста и выделения команд (БРТВК);
- блок выполнения команд управления устройствами (БВКУУ);
- блокчата (chat service) (БЧ);
- блок анализа документов (БАД);
- блок синтеза речи (БСР) и преобразования текста в аудио сигнал (Text-To-Speech – TTS).

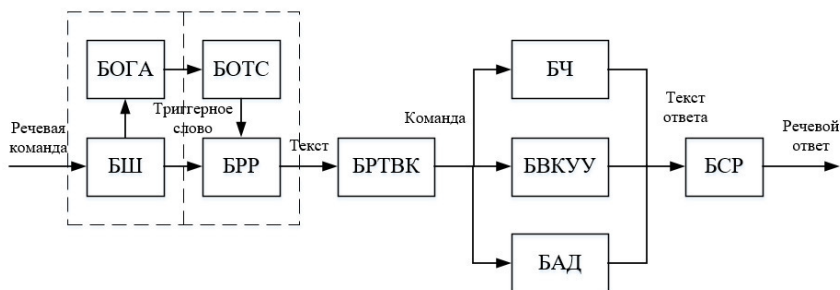


Рис. 1. Блок-диаграмма ГА

Блок БШ использует различные техники для уменьшения уровня шума и очистки голосового сигнала. Этот блок может быть реализован как аппаратно, так и программно. Блоки БОГА и БОТС могут быть выполнены в составе блока БРР или отдельно от него. При отдельной реализации блоки БОГА и БОТС постоянно прослушивают устройство речевого ввода

(микрофон) и, если пользователь произносит триггерное слово, запускают БРР и последующие блоки. В качестве триггерного слова чаще всего выступает имя ГА, например, Алиса или Маруся. Выделение блоков БОГА и БОТС имеет смысл, если для работы БРР требуется сеть Интернет или активация модели распознавания речи, требующей большого количества ресурсов. При этом возможны следующие варианты:

1) Блоки БОГА и БОТС выполнены в виде единого блока, т.е. одновременно производится обнаружение голосовой активности и триггерного слова. Для этого можно использовать технологию классификации звука (Audio classification) и соответствующие модели. При этом модель для классификации звука должна быть меньше и легче модели БРР.

2) Блок БОГА выполнен отдельно, а БОТС в составе блока БРТВК. Блок БОГА использует технологию обнаружения голосовой активности (Voice Activity Detection) для выделения речи из тишины или шума и соответствующие алгоритмы или модели.

Если функции БОТС выполняются в блоке БРТВК, то тогда поиск триггерного слова выполняется в тексте, после преобразования речи в текст. В этом случае БРР берет на себя функции БОГА и БОТС, и отдельная реализация этих блоков не требуется. Реализация блока БРР зависит от того будет ли ГА работать только автономно или он может работать как в онлайн-, так и офлайн-режиме. В режиме офлайн должна использоваться локальная STT модель. В настоящее время существует не так много STT инструментов и моделей с поддержкой русского языка. Наиболее популярными из них, для применения в ГА, являются Google Speech Recognition, Vosk, Nvidia Nemo RNNT и Open AI Whisper. При этом Vosk чаще всего применяется при офлайн-реализации ГА [3], а Google Speech Recognition – онлайн [4].

Блок БРТВК позволяет проанализировать полученный текст, обнаружить и выделить триггерное слово, если это не было сделано ранее, распознать текст и определить, относится ли текст к заданному перечню команд или он представляет собой запрос к данным, или произвольный вопрос. Реализация блока БРТВК зависит от условий, в которых будет применяться ГА и от сложности решаемых им задач. Для простых задач, ограниченных выполнением заданных функций, распознавание команд может осуществляться путем поиска в тексте имени команды. При этом требуется, чтобы пользователь ГА правильно произносил команды и эти команды могли быть точно распознаны блоком БРР.

Применение ГА на производстве, в условиях воздействия шума или других внешних источников звука, таких как шум от работающего технологического оборудования, станков и механизмов, передвижения транспорта или звук посторонних голосов, может приводить к тому, что преоб-

разование речи в текст блоком БРР будет производиться с ошибками. Например, в результате работы блока БРР может произойти употребление слова не в том падеже, с неправильным окончанием, предлогом, союзом или частицей, могут быть пропущены отдельные буквы или слово может быть разбито на несколько слов, имеющих похожий набор букв и т.д. В таких случаях применение простого поиска, основанного на полном совпадении слов, не будет давать результатов. Вместо этого необходимо использовать методы, позволяющие правильно классифицировать текст, даже если он содержит небольшие отклонения от оригинала. К таким методам относятся методы нечеткого сравнения строк, сравнение строк по косинусному расстоянию и методы МО.

Нечеткое сравнение строк – это набор методов, ориентированных на поиск похожих, но необязательно в точности совпадающих строк [5]. К таким методам относятся следующие:

- редакционное расстояние Левенштейна;
- редакционное расстояние Дамерау-Левенштейна;
- расстояние Джаро-Винклера;
- алгоритм Хемминга.

При вычислении редакционного расстояния определяется количество операций редактирования, которые необходимо проделать, прежде чем строки станут идентичными. Простейший вид редакционного расстояния, где каждая операция (вставки, удаления и замены символов) имеет одинаковый вес, называется расстоянием Левенштейна. Если к списку разрешённых операций добавить транспозицию (перестановку соседних символов), то получается редакционное расстояние Дамерау-Левенштейна. Расстояние Джаро-Винклера основывается на поиске точных и неточных совпадений в анализируемых строках. Алгоритм Хемминга вычисляет дистанцию между строками как число позиций, в которых соответствующие символы двух строк одинаковой длины различны. Алгоритм Хемминга применим только для строк одинаковой длины.

Косинусное расстояние измеряет сходство между строками как косинус угла между их векторными представлениями. Для вычисления косинусного расстояния необходимо сначала произвести векторизацию строки. Затем нужно вычислить косинус между векторами.

Использование методов МО основано на том, что модели МО способны к обобщению и могут быть нечувствительны к небольшим изменениям (ошибкам) в данных. При использовании в ГА модель МО обучается для решения задачи классификации команд на множестве возможных вариантов фраз, произносимых пользователем и относящихся к данной команде. Обученная модель МО, как правило, нечувствительна к таким ошибкам в данных, как пропуск букв, замена отдельных букв, замена од-

ного из слов другим словом, включающим похожий набор букв, и т.п. ошибкам.

Если результат, полученный на выходе БРТВК, относится к заданному перечню команд, то он поступает в блок БВКУУ, в котором происходит выполнение соответствующей команды. Основное назначение блока БВКУУ – это выполнение функций по контролю и управлению производственным объектом. Поэтому БВКУУ должен поддерживать различные протоколы и стандарты взаимодействия с техническими устройствами из набора технологий Интернет-вещей (Internet of Things – IoT) [2].

Если выход БРТВК представляет собой запрос к данным документов, связанных с производственным объектом, то он передается в блок БАД. Если результат представляет собой общий вопрос, например, связанный с объяснением какого-то технического термина, то он передается в БЧ. Появление блоков БЧ и БАД в структуре ГА связано с прогрессом в области ИИ и больших языковых моделей (Large Language Model – LLM) [6]. Основное назначение БЧ – это предоставление пользователю общенаучной и общетехнической справочной информации, например, как перевести из одних единиц измерения в другие. В отличие от этого, назначением БАД является получение специальной информации о том производственном объекте, с которым пользователь взаимодействует посредством ГА. Источником такой информации являются файлы с различной технической документацией, наборы и базы данных. Извлечение данной информации производится с помощью LLM с применением технологии Retrieval Augmented Generation [6].

Применяемые в блоках БЧ и БАД LLM должны поддерживать русский язык. В онлайн ГА могут применяться такие русскоязычные LLM, как GigaChat от Сбера или Yandex GPT от Яндекса. В офлайн ГА работа с LLM должна производиться локально. Поэтому тип и размер используемой LLM будут зависеть от количества вычислительных ресурсов системы, на которой работает ГА. Это может ограничить возможности ГА по ответам на общие вопросы или обработке запросов к данным документов.

В блоке БСР ответное сообщение ГА преобразуется из текстового вида в аудиосигнал. Это выполняется с помощью TTS-инструментов и моделей. К TTS-инструментам ГА предъявляются примерно такие же требования, как и к SST-моделям. В настоящее время, наиболее популярными для применения в ГА, являются TTS-инструменты pyttsx3 [7] и RHVoice [8].

2. Распознавание текста команд. Протестируем возможности различных подходов по распознаванию текста в блоке БРТВК. Как было сказано ранее, при использовании ГА на производстве команды пользователя могут произноситься на фоне посторонних звуков и шумов. Поэтому для

моделирования таких ситуаций, перед подачей в блок БРР к аудио сигналу будет добавляться белый шум различной интенсивности. Для распознавания речи в блоке БРР используем модель Vosk Small. Для распознавания команд в блоке БРТВК применим различные методы нечеткого сравнения строк, сравнение строк по косинусному расстоянию и модель МО. В качестве модели МО будет использоваться логистическая регрессия.

Пусть триггерным словом при обращении к ГА будет «агент». Для упрощения проводимого анализа авторы решили не выделять триггерное слово из команды и сравнивать строки вместе с триггерным словом. При этом триггерное слово также включили во все варианты строк для обучения модели МО.

Рассмотрим распознавание двух команд для получения значений технологических переменных энергетического объекта, обслуживаемого с помощью ГА. Текст команды 1 – это строка «агент какая температура воды», команды 2 – «агент какой расход воды». Для оценки работы алгоритмов нечеткого сравнения строк будем сравнивать распознанный текст как с исходным текстом команды, так и с текстом другой команды. Результаты распознавания команды 1 и сравнения с исходным текстом этой команды показан в табл. 1. Результаты распознавания команды 1 и сравнения с текстом команды 2 показан в табл. 2.

Таблица 1. Результаты распознавания команды 1 и сравнения с текстом этой команды

Шум, %	Распознанный текст	R	PR	DL	JW	H	Cos	МО
0	агент какая температура воды	1	1	1	1	1	0.99	+
5	один какая температура воды	0.87	0.90	0.86	0.79	0.04	0.95	+
10, 15	отдел какая температура воды	0.86	0.88	0.82	0.81	0.82	0.96	+
20	агент какая температура воды	0.96	0.96	0.96	0.98	0.96	0.98	+
25	он опять температуру воды	0.72	0.72	0.64	0.74	0.04	0.77	+
30	сделать это температуру воды	0.68	0.64	0.61	0.78	0.61	0.82	+

В колонке «Шум» задается уровень белого шума, накладываемого на речь, в диапазоне от 0 до 30% к амплитуде речевого сигнала. В табл. 1 используются следующие обозначения: R – нормализованное сходство по расстоянию Левенштейна со значением веса замены 2, PR – показатель Rс учетом уникальных и общих слов в сравниваемых строках, DL – нормали-

зованное сходство по расстоянию Дамерау-Левенштейна, JW – нормализованное сходство по расстоянию Джаро-Винклера, H – нормализованное сходство по расстоянию Хэмминга, Cos – сходство по косинусному расстоянию, МО – результат работы модели МО, при этом знак «+» означает, что модель правильно распознала строку, а знак «-», что распознала неправильно.

Таблица 2. Результаты распознавания команды 1 и сравнения с текстом команды 2

Шум, %	Распознанный текст	R	PR	DL	JW	H	Cos	МО
0	агент какая температура воды	0.67	0.67	0.61	0.83	0.36	0.8	+
5	один какая температура воды	0.52	0.48	0.44	0.67	0.04	0.87	+
10, 15	отдел какая температура воды	0.51	0.47	0.41	0.67	0.18	0.83	+
20	агент какая температуру воды	0.67	0.67	0.61	0.83	0.36	0.78	+
25	он опять температуру воды	0.46	0.46	0.32	0.57	0	0.69	+
30	сделать это температуру воды	0.47	0.43	0.36	0.55	0.07	0.7	+

Результаты распознавания команды 2 и сравнения с исходным текстом этой команды показан в табл. 3. Результаты распознавания команды 2 и сравнения с текстом команды 1 показан в табл. 4.

Анализ данных табл. 1–4 позволяет заключить, что алгоритмы нечеткого сравнения строк, такие как R, PR, DL и JW, а также сравнение по косинусному расстоянию, при уровне шума большем, чем 10%, не позволяют точно различить команду 1 от команды 2. При этом R, DL дают более уверенные результаты, по сравнению с JW и сходством по косинусному расстоянию и, в отличие от PR, чувствительны к пропуску слов. Пороговым уровнем при распознавании команд для алгоритмов R и DL может быть значение 0.8 и более.

Алгоритм Хэмминга показывает одинаково низкие значения как при сравнении с исходным текстом команды при высоком уровне шума, так и при сравнении разных команд при низком уровне шума. Это связано с изменением длины распознанного текста для разных вариантов. Поэтому алгоритм Хэмминга не подходит для распознавания текста команд в ГА. Модель МО прекрасно справилась с распознаванием команды 1 и допустила ошибку при распознавании команды 2 только в самом сложном случае, ко-

гда были искажены все слова этой команды. При менее сильных искажениях модель МО правильно распознала текст команды даже при высоком уровне шума.

**Таблица 3. Результаты распознавания команды 2
и сравнения с текстом этой команды**

Шум, %	Распознанный текст	R	PR	DL	JW	H	Cos	МО
0, 5	агент какой расход воды	1	1	1	1	1	0.99	+
10	агент такое расход воды	0.91	0.91	0.91	0.96	0.91	0.96	+
15, 20	один такой расход воды	0.8	0.8	0.78	0.79	0.04	0.93	+
25	один той коротко ветлугой	0.42	0.42	0.2	0.54	0.04	0.76	–
30	один такой рот воды	0.67	0.57	0.61	0.7	0.13	0.86	+

**Таблица 4. Результаты распознавания команды 2
и сравнения с текстом команды 1**

Шум, %	Распознанный текст	R	PR	DL	JW	H	Cos	МО
0, 5	агент какой расход воды	0.66	0.66	0.61	0.83	0.36	0.8	+
10	агент такое расход воды	0.63	0.61	0.57	0.83	0.32	0.85	+
15, 20	один такой расход воды	0.48	0.44	0.43	0.56	0.04	0.62	+
25	один той коротко ветлугой	0.38	0.3	0.18	0.54	0.07	0.54	–
30	один такой рот воды	0.51	0.43	0.43	0.61	0.04	0.62	+

Анализ данных также показывает, что большой проблемой ГА, работающих в условиях воздействия шума, может стать обнаружение триггерного слова. Блок БРР правильно распознал триггерное слово для команд 1 и 2 только в двух из семи случаев. Поэтому если бы в ГА распознавание команд производилось только после выделения триггерного слова, как это сейчас принято во многих известных ГА, то это бы значительно снизило возможности ГА по применению для взаимодействия с промышленными объектами.

Заключение. Таким образом, в работе рассмотрено применение ГА для управления различными устройствами на производстве. Предложена архитектура ГА, ориентированных на взаимодействие с промышленными объектами. Особенностью данной архитектуры является блок БВКУУ с поддержкой технологий IoT, а также наличие блоков БЧ и БАД на базе LLM.

Основное внимание в работе уделяется проблеме классификации текста команд, полученных путем распознавания речи в условиях шума. Для распознавания команд применялись различные методы нечеткого сравнения строк, сравнение строк по косинусному расстоянию и модель МО. В качестве модели МО использовалась логистическая регрессия. Показано, что применение моделей МО является наиболее надежным способом распознавания текста команды из всех рассмотренных в работе. Отмечено, что большой проблемой ГА, работающих в условиях воздействия шума, может стать обнаружение триггерного слова. Эта проблема требует дальнейшего изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Что такое голосовой помощник. Что они умеют и как работают. URL: <https://dzen.ru/a/ZYvqBfpuU1aVS7m2?ysclid=m4565kl9y146455043> (дата обращения 02.12.2024)
2. Virtual Assistants in Industry 4.0: A Systematic Literature Review / R. Pereira, C. Lima, T. Pinto, A. Reis // *Electronics*. 2023. Vol. 12. P. 1–12.
3. VOSK Models. URL: <https://alphacephei.com/vosk/models> (дата обращения 02.12.2024)
4. GitHub – Uberi / speech_recognition: Speech recognition module for Python, supporting several engines and APIs, online and offline. URL: https://github.com/Uberi/speech_recognition (дата обращения 02.12.2024)
5. *Потанова А.А.* Исследование методов нечеткого сравнения строк и их применение в алгоритме поиска опечаток в тексте // Информатика: проблемы, методы, технологии: сб. тр. международной научно-практической конференции им. Э.К. Алгаинова. (г. Воронеж, 11-12 февраля 2021 г.). Воронеж, 2021. С. 1–6.
6. *Alammar J.* Hands-On Large Language Models / J. Alammar, M. Grootendorst. O'Reilly Media, Inc., 2024. 598 p.
7. GitHub – nateshmbhat/pyttsx3: Offline Text To Speech synthesis for python. URL: <https://github.com/nateshmbhat/pyttsx3> (дата обращения 02.12.2024)
8. GitHub – RHVoice/RHVoice: a free and open source speech synthesizer for Russian and other languages. URL: <https://github.com/RHVoice/RHVoice> (дата обращения 02.12.2024).

УДК 621.9

О. К. Украженко¹, К. А. Украженко²

¹Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: ukrazhenko.oleg@yandex.ru,

²Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ukrazhenko.konstantin@yandex.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ КОНТАКТНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ РЕЗЦА ОТ НАГРУЗКИ

Представлены зависимости упругих контактных нормальных перемещений резцов при зажиме и нагрузке от сил резания, проведена оптимизация коэффициента контактной податливости по критерию минимального давления в соединениях. Работа имеет актуальное практическое применение и направлена на повышение эффективности одних из массовых в механообрабатывающем производстве токарных операций.

Ключевые слова: резец, жесткость, упругие перемещения, резцедержатель, соединение, коэффициент контактной податливости, плоскость стыка

О. К. Ukrazhenko¹, К. А. Ukrazhenko²

¹P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: ukrazhenko.oleg@yandex.ru

²Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ukrazhenko.konstantin@yandex.ru

ANALYTICAL STUDY AND DETERMINATION OF ELASTIC CONTACT MOVEMENTS OF THE INSICORS FROM THE LOAD

The dependences for determining the elastic contact normal movements of the cutters during clamping and loading on the cutting forces are presented, the coefficient of contact compliance is optimized according to the criterion of minimum pressure in the joints. The work has an actual practical application and is aimed at improving the efficiency of some of the most massive turning operations in the machining industry.

Keywords: cutter, stiffness, elastic displacements, tool holder, joint, coefficient of contact compliance, joint plane

К исследованиям упругих нормальных перемещений от нагрузки, например, токарных резцов в резцедержателе, следует отнести:

1. Упругие начальные перемещения δ_0 при зажиме призматического резца в плоскости стыка.

2. Упругие перемещения δ_n призматического резца при нагрузке от сил резания, вне плоскости стыка.

Упругие перемещения δ_0 резцов при зажиме в плоскости стыка, можно определить по зависимости [1] согласно выражению

$$\delta_0 = C \sigma_0^m \mu, \quad (1)$$

где σ_0 – начальное давление в стыке, Н/мм²; $\sigma_0 = P_0 / F$, P_0 – сила зажима, Н; F – площадь стыка, мм²;

C – коэффициент, зависящий от геометрических параметров поверхности и свойств сопрягаемых материалов; для стальных и чугунных заготовок (деталей) с шероховатостью по ГОСТ 2789-73 значения усреднённого коэффициента C сведены в табл. 1;

Таблица 1. Значения коэффициента $C = f(R_a)$

Параметр R_a (класс) шероховатости	0,8 (7)	0,4 (8)	0,2 (9)	0,1 (10)	0,05 (11)
Коэффициент C	0,4-0,5	0,35	0,25	0,15	0,07

m – показатель степени, характеризующий состояние сопрягаемых поверхностей числом нагружений стыка, при многократном затягивании $n_3 > 2$, $m = 0,5$;

μ – коэффициент, учитывающий неплоскостность стыка, при площади $F \leq 50 \text{ см}^2$ этим коэффициентом можно пренебречь, т.е. $\mu = 1$.

Графическая зависимость $\delta_0 = f(\sigma_0)$ для разных коэффициентов C , представлена на рис. 1, а результаты занесены в табл. 2.

Таблица 2. Расчетные значения упругого перемещения δ_0

δ_0 , МКМ	C_3	1,4	2,5	2,8	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,3	4,5
	C_2	1,1	1,9	2,2	2,5	2,6	2,7	3,0	3,2	3,4	3,5
	C_1	0,8	1,4	1,6	1,8	,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
σ_0 , Н/мм ²		1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0

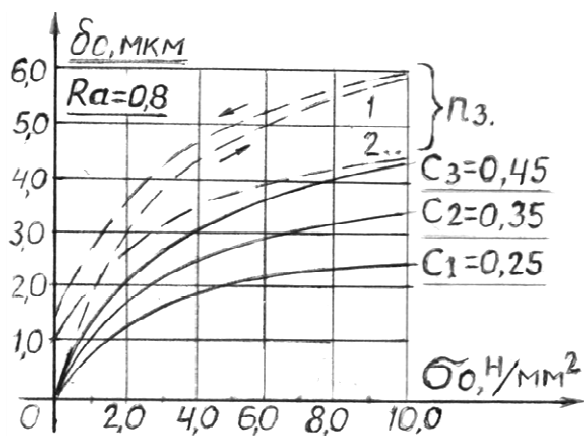


Рис. 1. График зависимости $\delta_0 = f(\sigma_0)$
(пунктиром обозначены повторные нагрузочно-разгрузочные ветви)

Физическая модель упругих перемещений δ_0 и δ_n от сил зажима P_0 и резания P_z представлена на рис. 2. Для исследования упругих перемещений δ_n резцов, рассмотрено влияние нагрузки вне плоскости стыка в виде момента M от силы резания $P_p = P_z$ на данное перемещение.

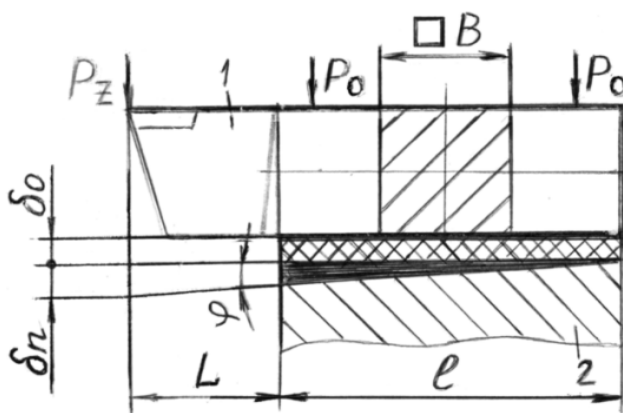


Рис. 2. Физическая модель упругих перемещений δ_0 и δ_n

В результате действия момента $M = P_z \cdot L_\varphi$ ($L_\varphi = L + l$) возникает отклонение резца l на угол φ с опорной плоскостью 2 (см. рис. 2), который создаёт перемещение δ_n , мкм, режущей кромки, выражение (2), при условии, что резец и зажимные элементы абсолютно жесткие:

$$\delta_n = \varphi \cdot L_\varphi. \quad (2)$$

Согласно исследованию [2], угол φ , мкм/мм, рассчитывается по формуле

$$\varphi = k \cdot M / I, \quad (3)$$

где I – момент инерции стыка, $I = B \cdot l^3 / 12$;

k – коэффициент контактной податливости, мкм·мм²/Н, устанавливающий пропорциональность между упругим перемещением δ и давлением в стыке σ_0 , учитывающий состояние поверхностного слоя (шероховатости, твёрдости, степени наклёпа, материала, числа повторных нагрузок), а также давления затягивания стыка, можно представить зависимостью:

$$k = C m \sigma_0^{m-1}, \quad (4)$$

где σ_0 – начальное давление, см. выражение (1);

m – коэффициент, учитывающий повторные нагрузки.

При $m = 0,5$ $k = 0,5C / \sqrt{\sigma_0}$; а с учетом внешней нагрузки σ_B : $k = 0,5C / \sqrt{\sigma_0 + \sigma_B}$. Установлены максимально оптимальные значения ККП $k = k_0$ по критерию минимального давления $\sigma_0 = \sigma_M = f(k_0)$ в стыке для разных параметров Ra с целью научно обоснованного их применения [3].

Значение ККП (k_0) определялось исследованием зависимости функции $k = f(\sigma_0)$ (рис. 3), в окрестности точки j на участке $(j_{-1} - j_{+1})$ соответственно изменению давления $\Delta\sigma = 1 \text{ Н/мм}^2$ перехода с нелинейного на пологий, практически прямолинейный участок.

На участке $(j_{-1} - j)$ $\Delta\sigma = 0,5 \text{ Н/мм}^2$, и изменение коэффициента k значительно больше, чем на участке $(j - j_{+1})$. Следовательно, повышение k_0 приводит к существенному увеличению упругих перемещений δ_n от нагрузки, а снижение k_0 (при $\sigma_0 \geq \sigma_m$) приводит практически к линейному равномерному и незначительному повышению перемещений δ_n , согласно закону Р. Гука. Аналитически это можно представить

путём численного дифференцирования элементарного перемещения dk по давлению $d\sigma$, согласно выражению (5), где $d\sigma$ – единичное давление, равное $0,1 \text{ Н/мм}^2$.

$$\frac{dk_{jn}}{d\sigma_{jn}} \gg \frac{dk_{j-1}}{d\sigma_{j-1}} > \frac{dk_j}{d\sigma_j} \approx \frac{dk_{j+1}}{d\sigma_{j+1}} = \dots = \frac{dk_n}{d\sigma_n} = \text{const.} \quad (5)$$

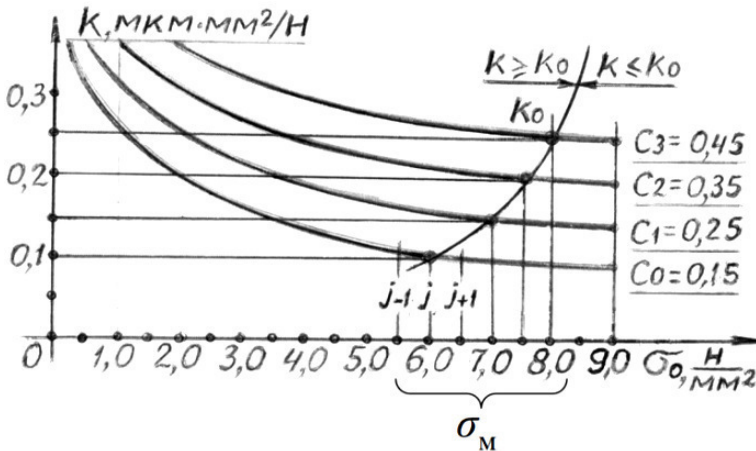


Рис. 3. Графики зависимости $k = f(\sigma_0)$ при разных значениях $C = f(R_n)$

Расчётные значения коэффициента k_0 для разных коэффициентов C представлены в табл. 3. Графически зависимость $k = f(\sigma_0)$ (см. рис. 3) наглядно показывает изменение коэффициента k от давления σ и коэффициент C . При расчётах упругих контактных перемещений $\delta_{KKП}$ k следует принимать $k \leq k_0$, при выборе $k \ll k_0$, требуется предварительный расчёт на прочность зажимных элементов резцов.

Таблица 3. Расчетные значения параметров при оптимизации

Параметры	№	1	2	3	4
k_0 , мкм·мм ² /Н	0,10		0,15	0,20	0,25
$\sigma_M = 1$ Н/мм ²	6,0		7,0	7,5	8,0
Коэффициент C	0,15		0,25	0,35	0,45

Из зависимостей (1)–(4) видно, что основными параметрами, существенно влияющими на упругие нормальные перемещения δ_0 и δ_n резцов, является шероховатость сопрягаемых поверхностей и давление в соединениях с резцедержателем.

Общее давление σ на поверхности стыка состоит из двух слагаемых:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_B,$$

где σ_0 – начальное давление в плоскости стыка от сил зажима P_0 , вызывающих перемещение δ_0 , $\sigma_0 = P_0 / F$;

σ_B – внешнее давление, от сил резания P_p , трансформированных в плоскость стыка и вызывающих перемещения δ_n ; $\sigma_B = P_B / F$; $P_B = f(P_p)$.

Общая зависимость $\delta = f(\sigma)$ представлена графически на рис. 4, где точка k_0 с координатами $(\delta_0; \sigma_m)$, соответствующая оптимальному ККП, делит график на два участка: 1) нелинейный (подготовительный) – зажима резца; 2) линейный (рабочий) – нагрузки резца от сил резания.

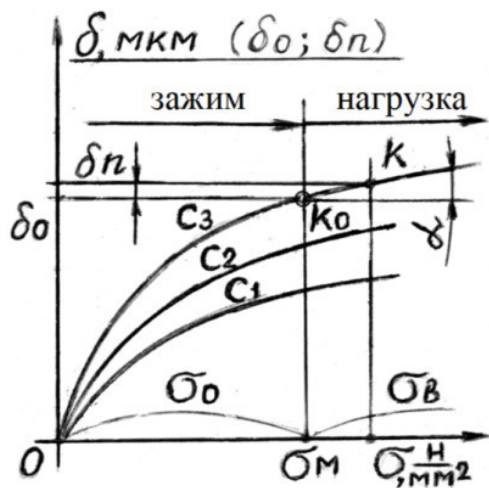


Рис. 4. Зависимость $\delta = f(\sigma)$ упругих перемещений δ от давления σ

Из графика (см. рис. 4) видно, что при нагрузке от силы резания $P_p = P_z$, на рабочем участке перемещение δ_n изменяется незначительно и прямо пропорционально давлению σ_B .

Путем численного дифференцирования элементарных упругих перемещений $d\delta n$ по давлению $d\sigma_B$, $d\delta n/d\sigma_B = \operatorname{tg} \alpha = k$, установлено, что при $k \leq k_0$ $\delta_n = k \cdot \sigma_B$.

На основании проведенного исследования можно рассчитывать силы зажима P_0 согласно давлению σ_m при разных коэффициентах $C = f(R_a)$, что позволит значительно повысить жесткость соединений резцов с резцедержателем, следовательно, и точность, производительность обработки и надежность автоматизированного технологического процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский А.П. Жесткость в технологии машиностроения. М–Л.: Машгиз, 1946. 207 с.
2. Левина З.М. Контактная жесткость машин / З.М. Левина, Д.Н. Решетов. М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
3. Украженко О.К. Повышение жесткости токарных инструментальных модулей / О.К. Украженко, К.А. Украженко // Сборник научных трудов XVI Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации». Часть 3. Новосибирск: НГТУ, 2022. 3. С. 232–235.

Содержание

МАТЕМАТИКА

1. Абрамов В.В., Юдин Д.В. Продуктивность одной модели ограниченной односекторной экономики.....	3
2. Башкин М.А. Однородное нерасщепимое супермногообразие, связанное с расслоением $E(9, 5, 4, 2)$	11
3. Гулевич Н.М., Кузнецов В.О., Старостина С.А. О неподвижных точках нерастягивающих отображений плоскости.....	15
4. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях кусочно-гладкого векторного поля в окрестности его периодической траектории, касающейся линий переключения.....	23
5. Титаренко С.А. Теоремы изометрии и клеточности в задаче «Услышать форму барабана».....	37

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

6. Башкин М.А., Монахова А.А., Силин В.С. О мотивации инженеров-программистов при изучении высшей математики.....	48
7. Березина Л.В., Васильева А.В., Бурцев А.И. Об опыте организации и проведения Всероссийской студенческой математической олимпиады в РГАТУ имени П.А. Соловьева.....	52
8. Васильева А.В., Березина Л.В., Бурцев А.И. Задачи Всероссийской студенческой математической олимпиады имени П.А. Соловьева 2024 года.....	57
9. Гулевич Н.М., Кузнецов В.О., Беякова Л.В., Старостина С.А. Выпуклые множества и корни производной многочлена..	65
10. Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш. Задания и результаты Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2024 года...	76
11. Сидорова Л.А. Опыт использования искусственного интеллекта для составления тестов.....	85
12. Смирнов М.О., Маевский В.К. Современный инструментарий DevOps-инженера.....	92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

13. Васильева А.В., Булин Е.М. Численное моделирование течения потока в расширяющемся трубопроводном канале с целью определения коэффициента местного сопротивления.....	95
14. Гусаров А.В. К вопросу моделирования цифровой системы стабилизации.....	101

15. Жаров А.Н., Миневичева И.Г. О формировании глобальной матрицы жесткости при расчете плоских рам методом конечных элементов.....	107
16. Жаров А.Н., Миневичева И.Г. Метод конечных элементов для стационарного двумерного температурного поля.....	120
17. Ивнев А.А., Ярвепер Е.Р. Моделирование реального состава газовой смеси при расчете теоретического термодинамического цикла поршневого ДВС.....	132
18. Королева В.С. Оценка динамики влияния экономических факторов на общий коэффициент рождаемости.....	145
19. Лискина Е.Ю., Ефименко И.В. Идентификация параметров модели Р. Солоу с дискретным временем.....	154
20. Марьясин О.Ю., Рипнягов А.В. Производственный голосовой ассистент.....	165
21. Украженко О.К., Украженко К.А. Аналитическое исследование и определение упругих контактных нормальных перемещений резца от нагрузки.....	175

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 20

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 28.02.24. Формат 60х84 1/16. Бумага белая.
Гарнитура Таймс. Офсетная печать
Усл. печ. л. 10,69. Тираж 25. Заказ 7.

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Отпечатано в Копировальном центре ЯГТУ
152023, Ярославль, Московский пр., 88