

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 19



Ярославль 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 19

Ярославль
Издательство ЯГТУ
2024

УДК 51:378

ББК 22.1

М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. – 184 с.

ISBN 978-5-9914-1035-9

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, информатики и методики их преподавания, а также математического моделирования экономических, технических, химических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378

ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. Н. Жаров (председатель), А. Б. Капранова,
Ю. К. Оленикова, М. Е. Соловьев, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России»; В.И. Бачурин, д-р физ.-мат. наук, доцент Ярославского филиала Физико-технологического института им. К.А. Валиева РАН.

ISBN 978-5-9914-1035-9

© Ярославский государственный
технический университет, 2024

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.51

В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается нелинейная нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Правая часть системы локально является достаточно гладкой по фазовой переменной и по малому параметру, периодической по независимой переменной. Соответствующая линейная однородная система при нулевом параметре имеет ортогональную матрицу монодромии. По свойствам первого нелинейного приближения оператора монодромии получен достаточный признак устойчивости нулевого решения по параметру. Результат применен для исследования модели маятника с вибрирующей точкой подвеса и демпфером.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, устойчивость, оператор монодромии, малый параметр

V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

ON THE QUESTION OF THE STABILITY OF THE ZERO SOLUTION OF A NON-AUTONOMOUS PERIODIC SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

We consider a nonlinear normal system of ordinary differential equations. The right part of the system is locally quite smooth in terms of the phase variable and in terms of a small parameter, it is periodic in terms of the independent variable. The corresponding linear homogeneous system with zero parameter has an orthogonal monodromy matrix. According to the properties of the first nonlinear approximation of the monodromy operator, a sufficient sign of stability of the zero solution with respect to the parameter is obtained. The result is used to study a pendulum model with a vibrating suspension point and a damper.

Keywords: system of differential equations, stability, monodromy operator, small parameter

Данная работа дополняет результаты, полученные в [1] для общего критического случая по линейному приближению, когда при нулевом значении параметра линейная система, соответствующая исследуемой системе дифференциальных уравнений, устойчива по Ляпунову, но не асимптотически. Здесь, в отличие от результатов работы [1], не используются условия коммутирования матриц для локальной оценки нормы правого оператора монодромии. Это позволяет построить коэффициентный признак устойчивости, который более эффективен для практической проверки, например, с помощью компьютерных вычислений.

Рассмотрим ω -периодическую непрерывную по t систему вида

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x, \mu), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ – малый параметр, $g(t, x, \mu)$ – достаточно гладкая вектор-функция от (x, μ) в окрестности точки $(0_n, 0_m)$, $g(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$, $g'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nn}$. Будем предполагать, что система $\dot{x} = A(t)x$ имеет фундаментальную матрицу $X(t)$, $X(0) = E$, обладающую свойством $X^{-1} = X^T$, где $X = X(\omega)$ – матрица монодромии. Заметим, что свойство ортогональности матрицы монодромии характерно для различных моделей осцилляторов.

Задача. *Определить условия, при которых решение $x \equiv 0_n$ системы (1) является μ -устойчивым по следующему определению.*

Пусть $x(t, a, \mu)$, $x(0, a, \mu) = a$ – решение системы (1).

Определение. Нулевое решение системы вида (1) называется μ -устойчивым (*устойчивым по параметру*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ и множество $M : 0_m \in M \subseteq \mathbb{R}^m$, при которых для всех $t > 0$, $a : \|a\| < \delta_1$ и $\mu \in M : \|\mu\| < \delta_1$ имеет место оценка $\|x(t, a, \mu)\| < \varepsilon$.

Так как при (x, μ) из окрестности точки $(0_n, 0_m)$ система (1) близка к линейной, то при любых a и μ , удовлетворяющих условиям $\|a\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$, δ – достаточно малое число, определен правый оператор монодромии $Ua : a \rightarrow x(\omega, a, \mu)$ [3, с. 131]. Тогда свойство устойчивости нулевого решения системы (1) можно установить на основе оценки степеней оператора монодромии.

Лемма 1. *Решение $x \equiv 0_n$ системы (1) μ -устойчиво тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие δ_1 :*

$0 < \delta_1 \leq \delta$ и $M : 0_m \in M \subseteq \mathbb{R}^m$, что $\|x(k\omega, a, \mu)\| < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $a : \|a\| < \delta_1$ и $\mu \in M : \|\mu\| < \delta_1$.

Необходимость условия леммы 1 следует непосредственно из определения устойчивости. Достаточность устанавливается по аналогии с доказательством леммы 9.1 из монографии [3].

Лемма 2. *Если существует такое $\delta_1: 0 < \delta_1 \leq \delta$, что для всех $a: \|a\| < \delta_1$ и $\mu \in M: \|\mu\| < \delta_1$ имеет место оценка $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta_1$, то решение $x \equiv 0_n$ системы (1) μ -устойчиво.*

В справедливости леммы 2 нетрудно убедиться, применив лемму 1 и метод математической индукции.

Положим лемму 2 в основу дальнейших рассуждений.

По свойствам системы (1) справедливо равенство вида

$$\begin{aligned} x(\omega, a, \mu) &= X \left(a + \int_0^{\omega} X^{-1}(t) g(t, x(t, a, \mu), \mu) dt \right) = \\ &= X(a + f(a, \mu) + \varphi(a, \mu) + \psi(a, \mu)) = Xp(a, \mu), \end{aligned} \quad (2)$$

в котором $p(0_n, \mu) \equiv 0_n$, $Xf(a, \mu)$ – главное однородное приближение правого оператора монодромии в виде вектор-формы от a и от μ ,

$$f(\alpha a, \beta \mu) = \alpha^k \beta^s f(a, \mu), \quad s \geq 0, \quad k + s > 1,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(k+s)} \|\varphi(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-s} \|\psi(a, \beta \mu)\| \equiv 0.$$

Далее систему (1), для которой получено выражение (2), будем называть системой (1)–(2).

Пусть $\|y\|_2 = \sqrt{y^T y}$ – норма вектора y , $\|Y\|_2 = \sqrt{\rho(Y^T Y)}$ – согласованная с ней норма матрицы Y , где $\rho(Y^T Y)$ – спектральный радиус матрицы $Y^T Y$; $\|Y\|_\infty = \max_i \sum_j |y_{ij}|$ – строчная норма матрицы $Y = [y_{ij}]$.

Теорема. *Если при некотором разложении $f(a, \mu) = F(a, \mu)a$, $F(a, \mu) = [f_{ij}(a, \mu)]$ существует такое значение $\mu = \mu_0$, $\|\mu_0\| = 1$, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda\|_2 = 1$ выполняются условия:*

$$2f_{ii}(\lambda, \mu_0) + \sum_{j=1}^n |f_{ij}(\lambda, \mu_0) + f_{ji}(\lambda, \mu_0)| \leq -q_i < 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то решение $x \equiv 0_n$ системы (1)–(2) μ -устойчиво.

Доказательство. Произвольным образом выберем разложения $\varphi(a, \mu) = \Phi(a, \mu)a$, $\psi(a, \mu) = \Psi(a, \mu)a$. При этом в силу равенства (2) и в силу свойства эквивалентности норм выполняются условия

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(k-1+s)} \|\Phi(\alpha a, \alpha \mu)\|_2 \equiv 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-s} \|\Psi(a, \beta \mu)\|_2 \equiv 0.$$

Допустим, $f(a, \mu) = F(a, \mu)a$.

Так как $X^{-1} = X^T$, то $\|X\|_2 = 1$. Тогда из (2) следует оценка

$$\|x(\omega, a, \mu)\|_2 \leq (\|E + F(a, \mu)\|_2 + \|\Phi(a, \mu)\|_2 + \|\Psi(a, \mu)\|_2) \|a\|_2. \quad (3)$$

Без ограничения общности рассуждений можно предполагать, что при $\|a\|_2 < \delta$, $\|\varepsilon\| < \delta$ выполняется неравенство

$$\|E + F(a, \mu) + \Phi(a, \mu) + \Psi(a, \mu)\|_2 < 2. \quad (4)$$

Далее будем предполагать: $\mu \in M = \{\mu = \beta \mu_0, \beta > 0\}$; $a = \alpha \lambda$, $\alpha > 0$, $\|\lambda\|_2 = 1$. По условию теоремы справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \left[E + F(a, \mu) \right]^T \left[E + F(a, \mu) \right] \right\|_{\infty} \leq \\ & \leq \left\| E + \alpha^{k-1} \beta^s \left[F^T(\lambda, \mu_0) + F(\lambda, \mu_0) \right] \right\|_{\infty} + \left(\alpha^{k-1} \beta^s \right)^2 \left\| F^T(\lambda, \mu_0) F(\lambda, \mu_0) \right\|_{\infty} \leq \\ & \leq 1 - \left(\alpha^{k-1} \beta^s \right) q + \left(\alpha^{k-1} \beta^s \right)^2 \left\| F^T(\lambda, \mu_0) F(\lambda, \mu_0) \right\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q = \min_{1 \leq i \leq n} \{q_i\}$. Произвольным образом выберем q_0 : $0 < q_0 < q$. В силу оценки (5) подберем число δ_1 : $0 < \delta_1 \leq \delta$ так, чтобы при $\alpha < \delta_1$, $\beta < \delta_1$ было справедливо неравенство

$$\left\| \left[E + F(a, \mu) \right]^T \left[E + F(a, \mu) \right] \right\|_{\infty} \leq 1 - \left(\alpha^{k-1} \beta^s \right) q_0. \quad (6)$$

Так как спектральный радиус матрицы – это нижняя грань множества ее норм [4], то из неравенства (6) имеем оценку

$$\begin{aligned} & \rho \left(\left[E + F(a, \mu) \right]^T \left[E + F(a, \mu) \right] \right) \leq \\ & \leq \left\| \left[E + F(a, \mu) \right]^T \left[E + F(a, \mu) \right] \right\|_{\infty} \leq 1 - \left(\alpha^{k-1} \beta^s \right) q_0. \end{aligned}$$

Следовательно, существует $b > 0$, при котором

$$\|E + F(a, \mu)\|_2 \leq 1 - \left(\alpha^{k-1} \beta^s \right) b \quad (7)$$

для всех $\alpha < \delta_1$ и $\beta < \delta_1$.

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(k-1+s)} \|\Phi(\alpha a, \alpha \mu)\|_2 \equiv 0$, то существует такое δ_2 : $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, что

$$\|\Phi(a, \mu)\|_2 \leq (\alpha^{k-1} \beta^s) b/2 \quad (8)$$

при $\|a\|_2 < \delta_2$ и $\|\mu\| < \delta_2$. Так как $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-s} \|\Psi(a, \beta \mu)\|_2 \equiv 0$, то можно подобрать δ_3 : $0 < \delta_3 \leq \delta_2$, при котором из условий $\delta_2/2 \leq \|a\|_2 < \delta_2$ и $\|\mu\| < \delta_3$ следует справедливость оценки

$$\|\Psi(a, \mu)\|_2 \leq (\alpha^{k-1} \beta^s) b/2. \quad (9)$$

Итак, при $\delta_2/2 \leq \alpha < \delta_2$ и $\beta < \delta_3$ в силу неравенств (3), (7)–(9) имеет место оценка

$$\|x(\omega, a, \mu)\|_2 < \|a\|_2 < \delta_2, \quad (10)$$

а при $\alpha < \delta_2/2$ и $\beta < \delta_3$ в силу неравенств (3) и (4) имеем

$$\|x(\omega, a, \mu)\|_2 < 2\|a\|_2 < \delta_2. \quad (11)$$

Из оценок (10) и (11) следует, что выполняется условие леммы 2. Значит, решение $x \equiv 0_n$ системы (1)–(2) устойчиво по параметру. Теорема доказана.

Пример. Исследуем локальный характер движений, определяемых моделью физического маятника $\ddot{x} + \sin x + p_1 \cos \beta t \sin x + p_2 \dot{x} = 0$ [5], предполагая дополнительно наличие специальной нелинейной составляющей силы сопротивления (демпфера). Рассмотрим в окрестности нулевого положения равновесия соответствующую систему вида (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (\sin x_1 - x_1) + \mu_1^2 \cos \beta t \sin x_1 + \mu_2^2 x_2 - dx_1^2 x_2 + \gamma(x_1) x_2, \end{cases} \quad (12)$$

в которой x_1 – угол отклонения маятника от положения равновесия,

$$\mu_1^2 = p_1 = \frac{rv^2}{g}, \quad \mu_2^2 = p_2 = \frac{\delta}{\sqrt{mag(j+ma^2)}}, \quad \beta = v \sqrt{\frac{(j+ma)^2}{mag}};$$

g – ускорение свободного падения; j – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колебаний; δ – коэффициент вязкого трения среды, в которой движется маятник; m – масса маятника; a – его длина; r – амплитуда колебаний точки подвеса; v – частота колебаний точки подвеса; слагаемое $\mu_1^2 \cos \beta t \sin x_1$ –

движущая сила, связанная с колебаниями точки подвеса; слагаемое $\mu_2^2 x_2 - dx_1^2 x_2 + \gamma(x_1)x_2$ – демпфер (параметр $d > 0$ условно назовем коэффициентом демпфирования), $\lim_{x_1 \rightarrow 0} |x_1|^{-2} |\gamma(x_1)| = 0$.

Будем предполагать, что r и δ могут быть выбраны произвольно малыми, то есть $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ – малый параметр. Кроме того, рассмотрим частный случай, когда β – иррациональное число. Для определенности выберем $\beta = \sqrt{5}$.

Определим характер движений в модели (12) в зависимости от d .

Правая часть системы (12) по t имеет период $\omega = 2\pi/\beta$. Сопоставляя системы (1) и (12), получим, что $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Следовательно,

$X = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$ – матрица монодромии при $\mu = 0_2$. В рассматриваемом случае $\det[X - E] \neq 0$. Значит, решения $x(t, a, \mu)$ системы (12) при достаточно малых $\|a\| \neq 0$ и $\|\mu\| \neq 0$ не являются периодическими [6]. Матрица монодромии для системы (12) имеет вид

$$T(\mu) = XQ(\mu) = X[E + B(\mu)],$$

$$B(\mu) = \int_0^\omega X^T(t) \begin{bmatrix} \mu_1^2 \cos \beta t \sin t \cos t + \mu_2^2 \sin^2 t & \mu_2^2 \sin t \cos t - \mu_1^2 \cos \beta t \sin^2 t \\ \mu_1^2 \cos \beta t \cos^2 t + \mu_2^2 \sin t \cos t & \mu_2^2 \cos^2 t - \mu_1^2 \cos \beta t \sin t \cos t \end{bmatrix} dt.$$

Так как $\rho(T(\mu)) > 1$ при малых $\mu \neq 0_2$, то нулевое решение системы (12) неустойчиво по Ляпунову по линейному приближению [7].

Для системы (12) построим разложение вида (2), в котором

$$f(a, \mu) = \int_0^\omega X^T(t) \bar{g}(X(t)a, \mu) dt, \text{ где } \bar{g}(x, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6}x_1^3 - dx_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

Допустим,

$$f(a, \mu) = F(a)a, \text{ где } F(a) = [f_{ij}(a)],$$

$$f_{11}(a) = \left(\frac{1}{6}I_3 - dI_2\right)a_1^2 + \left(\frac{1}{2}I_1 - dI_0 + 2dI_2\right)a_2^2,$$

$$f_{12}(a) = \left(2dI_1 - \frac{1}{2}I_2 - dI_3\right)a_1^2 + \left(-\frac{1}{6}I_0 - dI_1\right)a_2^2,$$

$$f_{21}(a) = \left(\frac{1}{6}I_4 - dI_3\right)a_1^2 + \left(2dI_3 + \frac{1}{2}I_2 - dI_1\right)a_2^2,$$

$$f_{22}(a) = \left(2dI_2 - \frac{1}{2}I_3 - dI_4\right)a_1^2 + \left(-\frac{1}{6}I_1 - dI_2\right)a_2^2,$$

$$I_s = \int_0^{\omega} \cos^s t \sin^{4-s} t dt, \quad s = \overline{0, 4}.$$

Вычисления показывают, что матрица $F(a)$ на единичной окружности удовлетворяет условию теоремы, установленной выше, по крайней мере, при $d \geq 0,094$. В частности, при $\|\lambda\|_2 = 1$, $d = 0,094$ верны оценки:

$$2f_{11}(\lambda) + |f_{12}(\lambda) + f_{21}(\lambda)| < -0,0002,$$

$$2f_{22}(\lambda) + |f_{12}(\lambda) + f_{21}(\lambda)| < -0,015.$$

Следовательно, нулевое решение системы (12) устойчиво по параметру. То есть решения системы (12) ограничены при малых значениях начальных значений и параметра.

Таким образом, при $\beta = \sqrt{5}$ и $d \geq 0,094$ в малой окрестности тривиального стационарного состояния модели (12) наблюдаются незатухающие негармонические колебания, если амплитуда колебаний точки подвеса и коэффициент вязкого трения достаточно малы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В.В.* Признаки устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. С. 3–6.
2. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. 303 с.
3. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 331 с.
4. *Хорн Р.А., Джонсон Ч.Р.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 666 с.
5. *Морозов А.Д.* К задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 4. С. 590–598.
6. *Абрамов В.В.* Малое периодическое решение системы с параметром // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 3–12.
7. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.

УДК 515.177

М. А. Башкин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ НЕРАСЩЕПИМЫХ СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ С СИГНАТУРОЙ 9, 6, 3, 2

В работе изложены новые результаты классификации однородных комплексных нерасщепимых супермногообразий, связанных с комплексной проективной прямой в случае, когда соответствующее расщепимое супермногообразие определяется голоморфным векторным расслоением с сигнатурой 9, 6, 3, 2. Эта задача является частным случаем одной из достаточно сложных задач алгебраической геометрии.

Ключевые слова: однородное нерасщепимое супермногообразие, ретракт, касательный пучок

M. A. Bashkin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

CLASSIFICATION OF NON-SPLIT HOMOGENEOUS SUPERMANIFOLDS WITH SIGNATURE 9, 6, 3, 2

The paper presents new results of the classification of complex non-split homogeneous supermanifolds associated with a complex projective line in the case when the corresponding split supermanifold is determined by a holomorphic vector bundle with signature 9, 6, 3, 2. This problem is a one of the sufficiently complicated problems of algebraic geometry.

Keywords: non-split homogeneous supermanifolds, retract, tangent sheaf

В статье рассматриваются однородные комплексные нерасщепимые супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой [1–4].

Пусть \mathbf{E} – голоморфное векторное расслоение ранга n над комплексной проективной прямой. Тогда, согласно [3], оно имеет вид

$$\mathbf{E} = \bigoplus_{i=1}^n L_{-k_i}, \text{ где все } L_k \text{ – голоморфные линейные расслоения степени } k \geq 0.$$

Голоморфное векторное расслоение \mathbf{E} над комплексным многообразием (M, F) (в рассматриваемом случае $M = \mathbb{C}P^1$) определяет комплексное су-

пермногообразии $(M, \Lambda_F E)$, где E – пучок голоморфных сечений расслоения \mathbf{E} . Комплексное супермногообразие размерности $m|n$ – это пара (M, O) , где M – комплексное m -мерное многообразие, а O – пучок коммутативных супералгебр на M , локально изоморфная паре $(U, \Lambda_{F_m}(\xi_1, \dots, \xi_n))$, где U – область в \mathbf{C}^m , F_m – пучок голоморфных функций в \mathbf{C}^m . Супермногообразие называется однородным, если супералгебра голоморфных векторных полей транзитивна на нем, т. е. порождает касательное суперпространство в каждой его точке.

Рассмотрим расслоение $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{CP}^1$ ранга 4 вида

$$\mathbf{E} = L_{-9} \oplus L_{-6} \oplus L_{-3} \oplus L_{-2}.$$

Пусть \mathbf{CP}^1 покрыто двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и y соответственно. В $U_0 \cap U_1$ имеем: $y = x^{-1}$, $\eta_1 = x^{-9}\xi_1$, $\eta_2 = x^{-6}\xi_2$, $\eta_3 = x^{-3}\xi_3$, $\eta_4 = x^{-2}\xi_4$, где ξ_i и η_i ($i = 1, \dots, 4$) – базисные сечения расслоения \mathbf{E} над U_0 и U_1 .

Обозначим T_{gr} – градуированный касательный пучок на рассматриваемом супермногообразии и $\nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})$ – супералгебру Ли векторных полей на нем. Рассмотрим точную последовательность (см. [3])

$$0 \rightarrow \text{End } \mathbf{E} \rightarrow \nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})_0 \xrightarrow{\beta} sl_2(\mathbf{C}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Подалгебра $\alpha \subset \nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})_0$ расщепляет последовательность (1), если β изоморфно отображает α на $sl_2(\mathbf{C})$. В этом случае имеем представление $\nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})_0$ в виде полупрямой суммы $\text{End } \mathbf{E} \oplus \alpha$. В работе [3] показано, что супермногообразие является четно-однородным тогда и только тогда, когда на него поднимается подалгебра α , расщепляющая последовательность (1). Говорят, что супермногообразии (\mathbf{CP}^1, O) является четно-однородным относительно α . Из [4] следует, что с точностью до автоморфизма из $\text{Aut } \mathbf{E}$ существует одна подалгебра $\alpha \cong sl_2(\mathbf{C})$, расщепляющая (1). В выбранной системе координат ее базис имеет вид

$$e = \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 9\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 6\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 3\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4},$$

$$f = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 9x\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 6x\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 3x\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2x\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4}.$$

Рассмотрим подпучок $\text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} = \exp((T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4)$ пучка Aut O_{gr} . Гринном (P. Green) доказано, что множество супермногообразий с заданным ретрактом $(M, \text{O}_{\text{gr}})$ изоморфно множеству орбит группы Aut E на множестве $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$. Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии $U = \{U_0, U_1\}$.

Утверждение 1 ([1]). *Предположим, что $n < 6$ и $H^0(M, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$. Пусть заданы такие подпространства $Q_{2p} \subset Z^1(U, (T_{\text{gr}})_2)$ ($p = 1, 2$), что каждый класс когомологий из $H^1(M, (T_{\text{gr}})_2)$ содержит ровно по одному коциклу из Q_{2p} ($p = 1, 2$). Тогда любой класс когомологий из $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$ представляется единственным коциклом вида $z = \exp(u^2 + u^4)$, где $u^2 \in Q_2$, $u^4 \in Q_4$.*

Будем задавать супермногообразие (M, O) коциклом $u^2 + u^4$, подразумевая, что (M, O) соответствует коциклу $z = \exp(u^2 + u^4)$.

Используя метод, изложенный в разделе 2 работы [3], можно:

- 1) доказать, что справедливо равенство $H^0(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$;
- 2) вычислить базис пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_q)$, $q = 2, 4$.

Проведем исследование рассматриваемых супермногообразий на четно-однородность. Обозначим через $H^1(\mathbf{CP}^1, T_{\text{gr}})^\alpha$ множество α -инвариантных классов когомологий.

Утверждение 2. *Базис пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$, может быть представлен следующими коциклами:*

$$x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

Кроме того $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_4)^\alpha = \{0\}$.

Пусть $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} \rightarrow (T_{\text{gr}})_2$ – гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма α 2-компоненту элемента $\log \alpha$ в $(T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4$. Из утверждений 1 и 2 можно вывести

Утверждение 3. *Если α – подалгебра, расщепляющая последовательность (1) и если $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})^\alpha$ – множество классов, определяющих четно-однородные относительно α супермногообразия, то λ_2^* биективно отображает это множество на $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$.*

Тогда четно-однородные относительно α супермногообразия можно представить коциклами вида $u^2 + u^4$, где класс $[u^2]$ α -инвариантен, а класс $[u^4]$ может быть определен с помощью предложения 5.1 из [3]. Заметим, что α -инвариантные классы $[u^2]$ описаны ранее в утверждении 2. Проверив, что для них $[u^2; u^2] = 0$, из предложения 5.1 работы [3] получаем, что класс $[u^4]$ также должен быть α -инвариантным.

Утверждение 4. Для любой расщепляющей подалгебры α четно-однородные относительно α супермногообразия задаются коциклами из утверждения 2.

Исследуем на однородность полученные четно-однородные супермногообразия, используя

Утверждение 5 ([1]). Пусть выполнены условия утверждения 1, и пусть супермногообразии $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O})$ является четно-однородным относительно α . Супермногообразии $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O})$ однородно тогда и только тогда,

когда векторные поля $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ для $j = 1, \dots, 4$; поднимаются на $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O})$.

Сформулируем окончательный результат.

Теорема. Для сигнатуры $9, 6, 3, 2$ существует с точностью до изоморфизма одно однородное нерасщепимое супермногообразие, пред-

ставимое коциклом $x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$.

Доказательство. Рассмотрим коциклы, указанные в утверждении 2, и применим к ним утверждение 5. Используя критерий подъема из [3] (предложение 5.1), получаем, что нерасщепимые однородные супермногообразия задаются ненулевым коциклом, приведенным в формулировке теоремы. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин М.А.* Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вестник РГАТУ им. П.А. Соловьева. 2015. № 3 (34). С. 125–130.
2. *Башкин М.А.* Одно однородное нерасщепимое супермногообразие // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 9–12.
3. *Bunegina V.A.* Homogeneous supermanifolds associated with the complex projective line / V.A. Bunegina, A.L. Onishchik // J. Math. Sci. 1996. Vol. 82. P. 3503–3527.
4. *Onishchik A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. Vol. 16. P. 309–333.

УДК 517.51

А. А. Кельзон, Л. В. Белякова

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: kelson@mail.ru,
liubov.belyakova@yandex.ru

О НЕПРЕРЫВНОСТИ (m, Φ) -ВАРИАЦИИ ФУНКЦИИ

Доказывается непрерывность (m, Φ) -вариации вещественной функции при более слабых ограничениях по сравнению с ранее известным результатом.

Ключевые слова: обобщенная вариация, функция, непрерывность

A. A. Kel'zon, L. V. Belyakova

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint-Petersburg, e-mail: kelson@mail.ru,
liubov.belyakova@yandex.ru

ON CONTINUITY OF (m, Φ) -VARIATION OF THE FUNCTION

We prove the continuity of the (m, Φ) -variation of a real function under weaker restrictions compared to the previously known result.

Keywords: generalized variation, function, continuity

Классическое понятие функции ограниченной вариации (с ограниченным изменением) обобщалось различными авторами в разных направлениях. М. Шрамм [1] ввел понятие функции Φ -ограниченной вариации. Обобщение понятия вариации, предложенное в указанной работе, содержит в качестве частных случаев обобщения, которые ранее предлагали Н. Винер [2], Л. Юнг [3], Д. Ватерман [4]. В то же время обобщение М. Шрамма [1] не содержит обобщений, предлагавшихся Ф.И. Харшиладзе [5], С.К. Хавпачевым [6], Т.И. Ахобадзе [7], а также обобщения, введенного в [8].

В работе [9] (см. также [10]) было введено понятие функции (m, Φ) -ограниченной вариации, которое содержит в качестве частных случаев упомянутое выше обобщение М. Шрамма [1] и, кроме того, ряд обобщений, предложенных другими авторами. В [10] доказан ряд свойств функций (m, Φ) -ограниченной вариации.

Непрерывность (m, Φ) -вариации доказана в [10] при некотором дополнительном ограничении (см. замечание в конце настоящей статьи). Наша цель – избавиться от этого ограничения.

Напомним необходимые определения и обозначения.

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$, m – натуральное число. Через $\{I_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, обозначим последовательность непересекающихся интервалов $I_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset [a, b]$. Пусть далее $\Phi = \{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательность строго возрастающих выпуклых вниз (как следствие, непрерывных) функций, заданных на множестве неотрицательных чисел и таких, что $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ для всех n и x и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \infty \quad \text{для всех } x > 0. \quad (1)$$

Положим

$$V_{m, \Phi}(f; a, b) := \sup \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|\Delta^m f(I_n)|), \quad (2)$$

где

$$\Delta^m f(I_n) \equiv \Delta^m f(\alpha_n, \beta_n) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^{m-\nu} C_m^{\nu} f(\alpha_n + \nu h_n), \quad h_n = (\beta_n - \alpha_n) / m,$$

а верхняя грань в (2) берется по всевозможным последовательностям интервалов $\{I_n\}$, удовлетворяющим описанным условиям.

Величина $V_{m, \Phi}(f; a, b)$ называется (m, Φ) -вариацией функции f на отрезке $[a, b]$, и если $V_{m, \Phi}(f; a, b) < \infty$, то говорят, что f имеет (m, Φ) -ограниченную вариацию на $[a, b]$.

При $m = 1$ определение функции (m, Φ) -ограниченной вариации совпадает с определением функции Φ -ограниченной вариации в смысле М. Шрамма [1]. Если, кроме того, наложить дополнительные условия на последовательность функций $\Phi = \{\varphi_n\}$, то можно получить известные обобщения понятия функции ограниченной вариации, введенные Н. Винером [2] ($\varphi_n(x) = x^p$, $p \geq 1$), Л. Юнгом [3] ($\varphi_n(x) = \varphi(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$), Д. Ватерманом [4] ($\varphi_n(x) = x / \lambda_n$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – такая неубывающая последовательность положительных чисел, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$). Обычная вариация получается при $m = 1$ и $\varphi_n(x) = x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь m – произвольное натуральное число. Если положить $\varphi_n(x) = x$, то определение функции (m, Φ) -ограниченной вариации совпадает с определением функции с ограниченным m -изменением в смысле

С.К. Хавпачева [6], а в частном случае $m = 2$ и в смысле Ф.И. Харшиладзе [5]. При произвольном натуральном m и $\varphi_n(x) = x^p$, $p \geq 1$ получим определение функции ограниченной (m, p) -вариации из [8], а при $m = 2$ и $\varphi_n(x) = \varphi(x) \forall n \in \mathbb{N}$ – определение функции с ограниченной обобщенной второй вариацией в смысле Т.И. Ахобадзе [7].

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть последовательность функций $\Phi = \{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет описанным выше условиям. Пусть далее функция f имеет (m, Φ) -ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ при некотором натуральном m . Тогда:

а) если f непрерывна справа в точке a , то

$$V_{m, \Phi}(f; a, x) \rightarrow 0 \text{ при } x \downarrow a;$$

б) если f непрерывна слева в точке b , то

$$V_{m, \Phi}(f; x, b) \rightarrow 0 \text{ при } x \uparrow b;$$

в) если $[x, y] \subset [a, b]$, то

$$V_{m, \Phi}(f; x, y) \rightarrow 0, \text{ когда } x \text{ и } y \text{ одновременно сходятся к } a \text{ или } b.$$

Для доказательства теоремы потребуется следующая

Лемма. Пусть $\{\delta_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Пусть далее $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ – последовательность возрастающих непрерывных функций, заданных на множестве неотрицательных чисел и таких, что $\varphi_n(0) = 0$ при всех n .

Пусть, наконец,

$$\sup_{\{\delta'_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\delta'_n) < \infty, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всевозможным перестановкам $\{\delta'_n\}$ последовательности $\{\delta_n\}$.

Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\delta_{n+j}) = 0. \tag{4}$$

Доказательство леммы. Обозначим величину, стоящую в левой части (3) через C . Тогда для любой последовательности индексов $\{\ell_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\delta_{\ell_n}) \leq C. \quad (5)$$

Предположим, что равенство (4) неверно, т.е. при некотором $c > 0$ для сколь угодно большого натурального N имеет место

$$A(N) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\delta_{n+N}) > c.$$

Тогда при любом фиксированном ℓ для сколь угодно больших N будет

$$B_{\ell}(N) := \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \varphi_n(\delta_{n+N}) > \frac{c}{2}.$$

В самом деле,

$$D_{\ell}(N) := \sum_{n=1}^{\ell} \varphi_n(\delta_{n+N}) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

а тогда $B_{\ell}(N) = A(N) - D_{\ell}(N)$ при сколь угодно больших N будет больше $c/2$. Пользуясь этим, выбираем отрезки $[\ell_i, L_i]$ натурального ряда и числа N_i так, что

$$\sum_{k=\ell_i}^{L_i} \varphi_k(\delta_{k+N_i}) > \frac{c}{2} \quad (6)$$

и $\ell_k > L_{k-1} + N_{k-1}$. Суммируя неравенства (6) в достаточном количестве, получим противоречие с (5). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Достаточно доказать утверждение а), ибо утверждение б) доказывается аналогично, а утверждение в) является следствием а) и б).

Заметим, что если в некоторой правосторонней окрестности точки a функция f совпадает с многочленом степени не выше $m-1$, то доказываемое утверждение тривиально. Поэтому далее будем считать, что это не так, и тогда в сколь угодно малой правосторонней окрестности точки a содержится некоторый интервал I , для которого $\Delta^m f(I) \neq 0$.

Пусть $\{I_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N_1$ – семейство непересекающихся интервалов $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$, таких, что $[\alpha_n, \beta_n] \subset (a, b)$, $\Delta^m f(I_n) \neq 0$ при $n = 1, 2, \dots, N_1$ и

$$\sum_{n=1}^{N_1} \varphi_n(|\Delta^m f(I_n)|) > \frac{1}{2} V_{m,\Phi}(f; a, b). \quad (7)$$

Поскольку f непрерывна справа в точке a и функции φ_n непрерывны, то такое семейство существует.

Выберем теперь такое число $y_1 \in (a, (a+b)/2)$, что $[a, y_1] \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N_1} I_n \right) = \emptyset$ и из условия $I \subset (a, y_1]$ следует

$$|\Delta^m f(I)| \leq \min_{n=1, N_1} |\Delta^m f(I_n)|.$$

Далее, найдется семейство таких интервалов $\{I_n\} = \{(\alpha_n, \beta_n)\}$, $n = \overline{N_1+1, N_2}$, что $[\alpha_n, \beta_n] \subset (a, y_1]$, при указанных n и

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} \varphi_{n-N_1}(|\Delta^m f(I_n)|) > \frac{1}{2} V_{m, \Phi}(f; a, y_1).$$

Продолжая эту процедуру, получим для $k=1, 2, \dots$ точки y_k и интервалы $I_{N_k+1}, \dots, I_{N_{k+1}}$, содержащиеся в $(y_{k+1}, y_k]$ такие, что $y_k \downarrow a$ и

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varphi_{n-N_k}(|\Delta^m f(I_n)|) > \frac{1}{2} V_{m, \Phi}(f; a, y_k). \quad (8)$$

Так как f имеет (m, Φ) -ограниченную вариацию на $[a, b]$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|\Delta^m f(I_n)|) < \infty.$$

Положив в лемме $\delta_n := |\Delta^m f(I_n)|$, получим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|\Delta^m f(I_{n+j})|) = 0.$$

Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $J = J(\varepsilon)$, что при $j > J$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|\Delta^m f(I_{n+j})|) < \varepsilon.$$

Положив здесь $j = N_k$, получим, с учетом (8), что при достаточно больших k будут выполнены неравенства

$$\frac{1}{2} V_{m, \Phi}(f; a, y_k) < \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|\Delta^m f(I_{n+N_k})|) < \varepsilon.$$

Следовательно, $V_{m,\Phi}(f; a, y_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и поскольку $V_{m,\Phi}(f; a, y)$ – монотонная функция y , то $V_{m,\Phi}(f; a, y) \rightarrow 0$ при $y \downarrow a$.

Теорема доказана.

Замечание. В [10] эта теорема была доказана при дополнительном ограничении на последовательность $\Phi = \{\varphi_n\}$: там предполагалось, что функции $\psi_n(x) := \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)$ не убывают на $[0, +\infty)$ при всех натуральных n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schramm M.* Functions of Φ -bounded variation and Riemann-Stieltjes integration // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287. P. 49-63.
2. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Math. Phys. 1924. Vol. 3. P. 72-94.
3. *Young L.C.* Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p -ième bornée au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier // C. r. Acad. Sci. 1937. Vol. 204. P. 470-472.
4. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 107-117.
5. *Харшладзе Ф.И.* О функциях с ограниченным вторым изменением // ДАН СССР. 1951. Т. 79. С. 201-204.
6. *Хавпачев С.К.* О функциях с ограниченным m -изменением // Учен. зап. Кавказского ун-та. 1962. Вып. 16. С. 62-69.
7. *Ахобадзе Т.И.* О сходимости чезаровских средних отрицательного порядка функций ограниченной обобщенной второй вариации // Матем. заметки. 1976. Т. 20. С. 631-644.
8. *Кельзон А.А.* О функциях ограниченной (m, p) -вариации // Сообщ. АН Грузинской ССР. 1975. Т. 78. С. 533-536.
9. *Кельзон А.А.* О функциях (m, Φ) -ограниченной вариации // ДАН СССР. 1991. Т. 321. С. 670-672.
10. *Кельзон А.А.* Функции (m, Φ) -ограниченной вариации и сходимость рядов Фурье // Известия вузов. Математика. 1994. № 8. С. 29-38.

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ
ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩИХ
ПЕРВУЮ СТЕПЕНЬ НЕГРУБОСТИ**

Рассматриваются автономные дифференциальные уравнения второго порядка, заданные на окружности. Такое уравнение определяет векторное поле и динамическую систему на цилиндрическом фазовом пространстве. Уравнение называется грубым, если топологическая структура фазового портрета не меняется при достаточно малых в C^r -топологии изменениях правой части уравнения. Известно, что грубые уравнения образуют открытое и всюду плотное множество в пространстве всех рассматриваемых уравнений. В работе описаны уравнения первой степени негрубости – негрубые уравнения, топологическая структура фазового портрета которых не меняется при переходе к негрубому уравнению с достаточно близкой в C^r -топологии правой частью. Доказано, что уравнения первой степени негрубости образуют открытое всюду плотное подмножество в множестве всех негрубых уравнений.

Ключевые слова: *окружность, дифференциальное уравнение второго порядка, векторное поле на цилиндре, грубость, первая степень негрубости*

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS
HAVING FIRST DEGREE OF NON-ROUGHNESS**

We consider autonomous second-order differential equations defined on a circle. Such an equation defines a vector field and a dynamical system on a cylindrical phase space. An equation is called rough if the topological structure of the phase portrait does not change with sufficiently small changes in the right side of the equation in the C^r -topology. It is known that rough equations form an open and everywhere dense set in the space of all considered equations. The work describes equations of the first degree of non-roughness - non-rough equations, the topological structure of the phase portrait of which does not change when passing to a non-rough equation with a right-hand side that is sufficiently close in the C^r -topology. We prove that equations of the first degree of non-roughness form an open, everywhere dense subset in the set of all non-rough equations.

Keywords: *circle, second order differential equation, vector field on a cylinder, roughness, first degree of non-roughness*

Введение. Понятие грубой динамической системы, заданной векторным полем (автономной системой дифференциальных уравнений) было введено А.А. Андроном и Л.С. Понтрягиным в 1937 году. Суть грубости динамической системы состоит в том, что при «достаточно малом» возмущении системы топологическая структура фазового портрета не меняется, то есть существует гомеоморфизм фазового пространства, переводящий траектории невозмущенной системы в траектории возмущенной системы. А.А. Андроном и Л.С. Понтрягин описали грубые системы на двумерном диске, для которых траектории трансверсальны границе диска [1, 2]. Грубые системы образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех систем на любом ориентируемом компактном многообразии [3]. К настоящему времени получено описание грубых систем на замкнутых многообразиях любой размерности, однако такие системы не типичны [4–6]. А.А. Андроном и Е.А. Леонтович описали системы первой степени негрубости на двумерном диске – негрубые системы, топологическая структура фазового портрета которых не меняется при переходе к «достаточно близкой» негрубой системе [2]. Такие системы всюду плотны во множестве всех негрубых систем. Системы первой степени негрубости на двумерных ориентируемых поверхностях исследованы в [7]. Однако уже на поверхностях рода $p \geq 1$ системы первой степени негрубости не плотны во множестве всех негрубых систем [8].

В двумерном случае естественно описать динамические системы, грубые и первой степени негрубости относительно специальных классов систем.

Фазовые портреты систем, задаваемых полиномиальными векторными полями степени $\leq n$, естественно рассматривать на проективной плоскости. Необходимые и достаточные условия грубости таких систем к настоящему времени не получены, однако доказано, что грубые системы всюду плотны в пространстве всех таких систем [9].

Описание грубых систем и систем первой степени негрубости в пространстве систем, задаваемых однородными полиномиальными векторными полями степени n , получено в [10] и [11].

Грубость и первая степень негрубости для систем с симметрией, заданных на двумерном диске, рассматривалась в [12–14].

Грубость в пространстве систем в плоской области, задаваемых автономными дифференциальными второго порядка, исследована в [15].

В работах [16–18] грубость и первая степень негрубости была определена и изучена для динамических систем, задаваемых полиномиальными дифференциальными уравнениями второго порядка на окружности.

В настоящей работе описаны динамические системы на цилиндре, задаваемые дифференциальными уравнениями второго порядка на окружности, имеющими первую степень негрубости.

Далее без специального упоминания будем пользоваться терминологией книг [2] и [19].

1. Уравнения второго порядка на окружности, имеющие первую степень негрубости. Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

где $f : \mathbb{R} \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R} - C^r$ -функция ($r \geq 1$), 1-периодическая по первому аргументу и такая что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \pm f(x, \pm R) < 0, \quad (2)$$

будем отождествлять с функцией f . Можно считать, что уравнение (1) определено на окружности $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Множество $DE_2^r = DE_2^r(S^1)$ таких уравнений будем рассматривать как метрическое пространство с расстоянием

$$d(f_1, f_2) := \max_{0 \leq m+n \leq r} \max_{(x,y) \in [0,1] \times [-R,R]} \left| \partial^{m+n} (f_1(x,y) - f_2(x,y)) / \partial x^m \partial y^n \right|.$$

Уравнение f задает на фазовом цилиндре $\Phi := S^1 \times [-R, R]$ векторное поле $u\partial/\partial x + f(x,y)\partial/\partial y$, которое будем обозначать \vec{f} . Вследствие (2) в точках $\partial\Phi := S^1 \times \{-R, R\}$ это поле направлено внутрь Φ .

Уравнения f_1 и f_2 из DE_2^r назовем *топологически эквивалентными*, если топологически эквивалентны соответствующие векторные поля \vec{f}_1 и \vec{f}_2 , то есть существует гомеоморфизм $h_{f_1, f_2} : \Phi \rightarrow \Phi$, переводящий ориентированные траектории поля \vec{f}_1 в ориентированные траектории поля \vec{f}_2 .

Уравнение $f_0 \in DE_2^r$ назовем *грубым*, если существует такая его окрестность $U(f_0)$ в DE_2^r , что f_0 и любое уравнение $f \in U(f_0)$ топологически эквивалентны. Обозначим ΣDE_2^r множество уравнений $f_0 \in DE_2^r$ таких, что для поля \vec{f}_0 все особые точки и замкнутые траектории являются гиперболическими и не существует траекторий, идущих из седла в седло. Из [15] следует, что множество ΣDE_2^r открыто и всюду плотно в DE_2^r ,

а уравнение $f_0 \in DE_2^r$ является грубым тогда и только, когда оно принадлежит множеству ΣDE_2^r . При этом гомеоморфизм $h_{f_0, f}$ можно выбрать так, что отображение $f \mapsto h_{f_0, f}$ непрерывно в «точке» f_0 .

Будем говорить, что уравнение $f_0 \in DE_2^r \setminus \Sigma DE_2^r$ имеет первую степень негрубости, если существует такая его окрестность $U(f_0)$ в DE_2^r , что f_0 и любое негрубое уравнение $f \in U(f_0)$ топологически эквивалентны.

Обозначим $\tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$ множество уравнений $f_0 \in DE_2^r \setminus \Sigma DE_2^r$ ($r \geq 3$) таких, что для векторного поля \vec{f}_0 выполняется одно из следующих четырех условий:

- 1) Все особые точки и замкнутые траектории являются гиперболическими. Существует единственная сепаратриса L , идущая из седла в седло. Если L идет из седла $S_0 = (x_0, 0)$ в него же, то седловая величина $\text{tr } d\vec{f}(S_0) = f'_y(x_0, 0) \neq 0$.
- 2) Все особые точки и замкнутые траектории являются гиперболическими, за исключением одной замкнутой траектории – двойного цикла Γ .
- 3) Все особые точки и замкнутые траектории являются гиперболическими, за исключением одной особой точки – сложного фокуса кратности два.
- 4) Все особые точки и замкнутые траектории являются гиперболическими, за исключением одной особой точки – седло-узла кратности два. В случаях 2)-4) нет траекторий, являющихся и входящей сепаратрисой седла или седло-узла и выходящей сепаратрисой седла или седло-узла.

Обозначим $\tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$ множество уравнений из $\Sigma_1 DE_2^r$, удовлетворяющих следующим дополнительным условиям:

Д1) В случае 1) и сепаратрисы L , идущей из седла $S_0 = (x_0, 0)$ в него же, нет сепаратрис седел, либо ω -предельных, либо α -предельных к контуру $L \cup \{S_0\}$.

Д2) В случае 2) двойной цикл не является и ω -предельным и α -предельным множеством для сепаратрис седел.

Из [20] следует, что $\Sigma_1 DE_2^r$ всюду плотно в $DE_2^r \setminus \Sigma DE_2^r$.

Теорема 1. *Множество $\tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$ открыто и всюду плотно в $DE_2^r \setminus \Sigma DE_2^r$.*

Теорема 2. Уравнение $f_0 \in \text{DE}_2^r \setminus \Sigma \text{DE}_2^r$ имеет первую степень негрубости тогда и только тогда, когда принадлежит $\tilde{\Sigma}_1 \text{DE}_2^r$.

Доказательство теорем приведено в разделах 2 и 3.

2. Доказательство теоремы 1. Достаточно доказать, что $\tilde{\Sigma}_1 \text{DE}_2^r$ всюду плотно в $\Sigma_1 \text{DE}_2^r$. Пусть $U(f_0)$ – любая окрестность уравнения $f_0 \in \Sigma_1 \text{DE}_2^r$ в DE_2^r . Покажем, что ней есть уравнение из $\tilde{\Sigma}_1 \text{DE}_2^r$.

Пусть сначала для уравнения f_0 выполняются условия 1), причем существуют сепаратрисы L_1, \dots, L_n , ω -предельные к петле $\Gamma = L \cup \{S_0\}$. Все выходящие (входящие) сепаратрисы поля \vec{f}_0 , отличные от L и L_1, \dots, L_n , имеют ω -предельными (α -предельными) множествами либо узлы, либо фокусы, либо предельные циклы. Множество $\Phi \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент. Пусть Φ_{ext} – компонента, не содержащая L_1 . Для определенности будем считать, что Φ_{ext} находится с положительной стороны от Γ .

Рассмотрим уравнение $f_\mu : \ddot{x} = f_0(x, \dot{x}) + \mu \dot{x}$. Особые точки поля \vec{f}_μ совпадают с особыми точками поля \vec{f}_0 , и найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $|\mu| < \mu_0$ они являются гиперболическими и того же типа, что и для поля \vec{f}_0 . Можно также считать, что при $|\mu| < \mu_0$ все замкнутые траектории поля \vec{f}_μ также гиперболические [2] и $f_\mu \in U(f_0)$.

Для любой входящей (выходящей) сепаратрисы L_* седла S_* поля \vec{f}_0 возьмем гладкую трансверсаль l , пересекающую L_* в точке p_* . Так как инвариантные многообразия седла поля \vec{f}_μ гладко зависят от μ [19], то найдется такое $\mu_1 \in (0, \mu_0]$, что при $|\mu| < \mu_1$ поле \vec{f}_μ имеет единственную входящую (выходящую) сепаратрису $L_*(\mu)$, пересекающую трансверсаль l в точке $p(\mu)$ такой, что $p(\cdot) \in C^1$, $p(0) = p_*$. Сепаратрису $L(\mu)$ назовем продолжением по параметру μ сепаратрисы L_* . Число μ_1 можно выбрать общим для всех сепаратрис поля \vec{f}_0 и так, что продолжения по параметру $L_*(\mu)$ всех выходящих (входящих) сепаратрис L_* поля \vec{f}_0 , отличных от L и L_1, \dots, L_n , имели те же ω -предельные

(α -предельные) множества, что и L_* . Продолжение по параметру входящей (выходящей) сепаратрисы L седла S_0 обозначим $L^+(\mu)$ ($L^-(\mu)$).

При $\mu \in (0, \mu_1)$ вектор $\vec{f}_\mu(x, y)$ во всех точках $(x, y) \in L$, кроме точки пересечения L с окружностью $S^1 \times \{0\}$, направлен внутрь Φ_{ext} . Из [2, с. 377] следует, что найдется $\hat{\mu} \in (0, \mu_1)$, при котором выходящая сепаратриса $L_1(\hat{\mu})$ седла S_1 , продолжение по параметру сепаратрисы L_1 , совпадает с сепаратрисой $L^+(\hat{\mu})$. Сепаратрисы $L_2(\hat{\mu}), \dots, L_n(\hat{\mu})$ и $L^-(\hat{\mu})$ не могут идти в седла. Поэтому $L_1(\hat{\mu}) = L^+(\hat{\mu})$ – единственная траектория поля $\vec{f}_{\hat{\mu}}$, идущая из седла в седло. Тем самым $f_{\hat{\mu}} \in U(f_0) \cap \tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$. Случаи, когда Φ_{ext} находится с отрицательной стороны от Γ или имеются сепаратрисы, α -предельные к петле $\Gamma = L \cup \{S_0\}$ рассматриваются аналогично.

Пусть теперь для уравнения f_0 выполняются условия 2), причем существуют сепаратрисы L_1^+, \dots, L_m^+ , ω -предельные к двойному циклу Γ и сепаратрисы L_1^-, \dots, L_n^- , α -предельные к Γ .

Рассмотрим уравнение $f_\mu : \ddot{x} = f_0(x, \dot{x}) - \mu \dot{x}$. Выберем такое $\mu_1 > 0$, что при $|\mu| < \mu_1$ $f_\mu \in U(f_0)$, все особые точки поля \vec{f}_μ гиперболические, для всех сепаратрис седел поля \vec{f}_0 определены их продолжения по параметру. Можно также считать, что продолжения по параметру выходящих (входящих) сепаратрис, отличных от L_1^+, \dots, L_m^+ (L_1^-, \dots, L_n^-), ω -предельны (α -предельны) к узлам, фокусам и гиперболическим замкнутым траекториям.

Пусть $\eta : (-1, 1) \rightarrow S^1 \times (0, R) \subset \Phi - C^\infty$ -вложение, трансверсальное траекториям поля \vec{f}_0 , причем $\eta(0) \in \Gamma$. Тогда найдутся такие $\bar{u} > 0$ и $\mu_2 \in (0, \mu_1)$, что на дуге $\eta(-\bar{u}, \bar{u})$ определено отображения последования по траекториям поля $\vec{f}_\mu, |\mu| < \mu_2 : \eta(u) \mapsto \eta(P(u, \mu))$, $u \in (-\bar{u}, \bar{u})$, где $P(\cdot, \cdot) \in C^r$, $P(0, 0) = P'_u(0, 0) = 0$, $P''_{uu}(0, 0) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать $P''_{uu}(0, 0) > 0$. Используя формулу (36) из [2, с. 350] для производной функции последования по параметру, получаем

$$P'_\mu(0,0) = k \int_0^\tau Y^2(s) \exp\left(-\int_0^s f'_y(X(t), Y(t)) dt\right) ds,$$

где $x = X(t)$, $y = Y(t)$ – уравнения Γ , τ – период Γ , $k > 0$. Так как $P'_\mu(0,0) > 0$, то существуют такие числа $\bar{u} > 0$ и $\mu_3 \in (0, \mu_2]$, что $P(u, \mu) > 0$ при всех $u \in (-\bar{u}, \bar{u})$, $\mu \in (0, \mu_3)$. Теперь аналогично [2, с. 375] доказывается, что найдется $\hat{\mu} \in (0, \mu_3)$, при котором сепаратрисы $L_1^+(\hat{\mu})$ и $L_1^-(\hat{\mu})$ совпадают, а все замкнутые траектории поля $\vec{f}_{\hat{\mu}}$ являются гиперболическими.

Пусть также $L_{i_k}^+(\hat{\mu}) = L_{j_k}^-(\hat{\mu})$, для номеров $i_k \geq 2$, $j_k \geq 2$, $k = 1, \dots, s$. Выберем точки $q_k \in L_{i_k}^+(\hat{\mu})$, $k = 1, \dots, s$ и их окрестности $V(q_k)$, не пересекающиеся между собой и с $L_1^+(\hat{\mu})$. Аналогично [15] доказывается существование семейства уравнений $g_v \in U(f_0)$, $v \in [0, \bar{v}]$, такого, что $g_0 = f_{\hat{\mu}}$, $g_v(x, y) = f_{\hat{\mu}}(x, y)$ в точках вне окрестностей $V(q_k)$, $k = 1, \dots, s$, а продолжения по параметру $v \in (0, \bar{v})$ сепаратрис $L_{i_k}^+(\hat{\mu})$ и $L_{j_k}^-(\hat{\mu})$ не совпадают и, соответственно, ω -предельны и α -предельны к узлам, фокусам и гиперболическим замкнутым траекториям. Тогда $g_v \in U(f_0) \cap \tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Достаточность условий первой степени негрубости, сформулированных в теореме, следует из того, что векторные поля, определяемые уравнениями из $\tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$, имеют первую степень негрубости в пространстве C^r -векторных полей с C^r -метрикой на Φ [2, с. 382].

Докажем необходимость условий первой степени негрубости. Пусть уравнение $f \in DE_2^r$ имеет первую степень негрубости и $U(f)$ – такая его окрестность, что f и любое негрубое уравнение $\tilde{f} \in U(f)$ топологически эквивалентны. Вследствие теоремы 1 f топологически эквивалентно уравнению из $\tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$. Поэтому \tilde{f} имеет конечное число особых точек и замкнутых траекторий и справедливо одно из следующих утверждений:

А) Все замкнутые траектории – устойчивые или неустойчивые предельные циклы. Все особые точки – топологические узлы или топологи-

ческие седла. При этом существует единственная траектория L , идущая из седла S_1 в седло S_2 . Если $S_1 = S_2$, то нет сепаратрис седел, предельных к петле $L \cup S_1$.

Б) Все замкнутые траектории – устойчивые или неустойчивые предельные циклы, все особые точки – топологические узлы или топологические седла, за исключением одного топологического седло-узла. Нет траектории, являющейся одновременно и входящей, и выходящей сепаратрисой особых точек.

В) Все особые точки – топологические узлы или топологические седла. Все замкнутые траектории – устойчивые или неустойчивые предельные циклы, за исключением одного полуустойчивого цикла Γ , который не является и ω -предельным и α -предельным множеством для сепаратрис седел.

Рассмотрим случай А). Покажем, что все особые точки гиперболические. Предположим что это не так. Пусть $S_0 = (x_0 \bmod 1, 0)$ – негиперболическая особая точка, отличная от S_1 и S_2 . Без ограничения общности можно считать $x_0 \in (0, 1)$. Тогда либо А1) $f'_x(x_0, 0) = 0$, либо А2) $f'_x(x_0, 0) < 0$, $f'_x(x_0, 0) = 0$, то есть S_0 – негрубый фокус.

Пусть $V(S_0)$ – окрестность точки S_0 , задаваемая неравенствами $|x - x_0| < \delta$, $|y| < \delta$, $\delta < \min\{x_0, 1 - x_0\}$, не пересекающаяся с другими особыми точками, с замкнутыми траекториями и с сепаратрисой L . Пусть $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая C^r -функция, что $\alpha(x) = 1$ при $|x| \leq \delta/2$ и $\alpha(x) = 0$, если $|x| \geq \delta$, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-периодическая C^r -функция, совпадающая с $\alpha(x - x_0)(x - x_0)$ на отрезке $[0, 1]$.

В случае А1) рассмотрим уравнение

$$f_\varepsilon: \ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \varepsilon \alpha(\dot{x}) \beta(x),$$

где $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > 0$), если S_0 – узел (седло), и столь близкое к нулю, что $f_\varepsilon \in U(f)$. Тогда для f_ε точка S_0 – гиперболическое седло (узел). Следовательно, f_ε имеет больше седел (узлов), чем f , и потому f и f_ε не могут быть топологически эквивалентными. Поскольку уравнение f_ε имеет сепаратрису L , идущую из седла в седло, то оно негрубое. Получаем противоречие с выбором $U(f)$. Тем самым, в случае А1) точка S_0 – гиперболическая.

В случае А2) рассмотрим уравнение

$$f_\varepsilon : \ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \varepsilon\beta(x - x_0)\alpha(\dot{x})\dot{x},$$

где параметр $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > 0$), если S_0 неустойчивый (устойчивый) фокус, и столь близкий к нулю, что $f_\varepsilon \in U(f)$. Тогда число устойчивых (неустойчивых) топологических узлов у f_ε будет больше, чем у f . Как и в случае A1), получаем противоречие. Поэтому точка S_0 – гиперболическая.

Пусть теперь хотя бы одна точка S_1 или S_2 – негиперболическая. Пусть $V(q)$ – окрестность точки $q = (q_1, q_2) \in L$, $q_2 \neq 0$, не пересекающаяся с особыми точками и замкнутыми траекториями. Тогда существует уравнение $f_* \in U(f)$ такое, что $\vec{f}_*(x, y) = \vec{f}(x, y)$ при $(x, y) \in \Phi \setminus V(q)$, у которого нет сепаратрис, идущих из седла в седло. Уравнение f_* – негрубое, но не топологически эквивалентное f . Получили противоречие с выбором окрестности $U(f)$.

Покажем, что в случае A) все замкнутые траектории гиперболические. Предположим что это не так, и Γ – неустойчивая (устойчивая) негиперболическая замкнутая траектория. Пусть $V(q)$ – окрестность точки $q = (q_1, q_2) \in L$, $q_2 > 0$, не пересекающаяся с замкнутыми траекториями, отличными от Γ , с особыми точками и с сепаратрисой L . В [15] показано, что существует уравнение $f_* \in U(f)$ такое, что $\vec{f}_*(x, y) = \vec{f}(x, y)$ при $(x, y) \in \Phi \setminus V(q)$, у которого Γ – устойчивая (неустойчивая) гиперболическая замкнутая траектория. Поскольку у f_* число устойчивых (неустойчивых) замкнутых траекторий больше, чем у f , то получаем противоречие. Следовательно, в случае A) все замкнутые траектории гиперболические. Тем самым доказано, что в этом случае $f \in \tilde{\Sigma}_1 DE_2^r$.

Рассмотрим случай Б). Пусть $S_0 = (x_0 \bmod 1, 0)$ – топологический седло-узел. Как и в случае A), доказывается, что все замкнутые траектории и особые точки, отличные от S_0 , гиперболические. Покажем, что S_0 – седло-узел кратности 2. Пусть это не так. Тогда $f(S_0) = f'_x(S_0) = f''_{xx}(S_0) = 0$ и найдется такое $\bar{x} > x_0$, что отрезок $y = 0$, $x_0 \leq x \leq \bar{x}$ содержится в $V(S_0)$ и

$$f(\bar{x}, 0) > 0 \text{ (соотв. } f(\bar{x}, 0) < 0 \text{)}. \quad (3)$$

Окрестность $V(S_0)$ точки S_0 и функцию $\alpha : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ выберем так же, как в случае A1). Рассмотрим уравнение $f_\varepsilon : \ddot{x} = f_\varepsilon(x, \dot{x})$, где

$$f_\varepsilon(x, \dot{x}) := f(x, \dot{x}) + \varepsilon \alpha(x, \dot{x})(x - x_0)^2.$$

Тогда $f_\varepsilon(S_0) = (f_\varepsilon)'_x(S_0) = 0, (f_\varepsilon)''_{xx}(S_0) = 2\varepsilon$, и потому при $\varepsilon \neq 0$ S_0 – седло-узел кратности два [2, с. 235]. Ввиду (3) можно взять такое $\bar{\varepsilon} > 0$, что

$$f_\varepsilon(\bar{x}, 0) > 0 \text{ (соотв. } f_\varepsilon(\bar{x}, 0) < 0) \text{ при } \varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]. \quad (4)$$

Кроме того, можно считать, что при $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ $f_\varepsilon \in U(f)$. При $\varepsilon = -\bar{\varepsilon}$ (соотв. $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$) найдется такое $\underline{x} \in (x_0, \bar{x})$, что $f_\varepsilon(\underline{x}, 0) < 0$ ($f_\varepsilon(\underline{x}, 0) > 0$). Отсюда и из (4) следует, что функция $f_\varepsilon(\cdot, 0)$ имеет на интервале (x_0, \bar{x}) нуль. Тем самым, у негрубого уравнения $f_\varepsilon \in U(f)$ больше особых точек, чем у уравнения f . Поэтому эти уравнения не топологически эквивалентны. Получили противоречие, из которого следует, что S_0 – седло-узел, кратности 2.

Рассмотрим случай В). Как и в случае А), доказывается, что все особые точки и замкнутые траектории уравнения f , отличные от Γ , гиперболические. Покажем, что Γ – двойной цикл. Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что функция последования $u \mapsto P_0(u)$ на трансверсали по траекториям поля \vec{f} определена при $u \in [-u_0, u_0]$ и

$$\text{sgn } P_0(u) = \text{sgn } u, \quad P'_0(0) = P''_0(0) = 0. \quad (5)$$

Пусть $V(q)$ – окрестность точки $q = (q_1, q_2) \in \Gamma$, $q_2 > 0$, не пересекающаяся с замкнутыми траекториями, отличными от Γ , и с особыми точками. Из (5) и [15] следует, что существует семейство уравнений $f_\varepsilon \in U(f)$, $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, такое, что $f_0 = f$, а функции последования $u \mapsto P_\varepsilon(u)$ по траекториям \vec{f}_ε определена при $u \in [-\bar{u}, \bar{u}] \subset [-u_0, u_0]$ и найдется такое $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_1)$, что

$$P_{\bar{\varepsilon}}(0) = P'_{\bar{\varepsilon}}(0) = 0, \quad P''_{\bar{\varepsilon}}(0) < 0, \quad (6)$$

$$P_{\bar{\varepsilon}}(\bar{u}) > 0. \quad (7)$$

Вследствие (6) Γ – двойной цикл уравнения $f_{\bar{\varepsilon}}$. Из (6) и (7) следует, что $P_{\bar{\varepsilon}}(\cdot)$ имеет нуль на интервале $(0, \bar{u})$. Таким образом, негрубое уравнение $f_{\bar{\varepsilon}} \in U(f)$ имеет больше замкнутых траекторий, чем уравнение f , что противоречит их топологической эквивалентности. Следовательно, Γ – двойной цикл уравнения f , а $f \in \tilde{\Sigma}_1 \text{DE}'_2$.

Доказательство теоремы 2 закончено.

4. Уравнения второго порядка на отрезке, имеющие первую степень негрубости. Обозначим $I := [0, 1]$. Будем рассматривать уравнения вида $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, где $f : I \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ – C^r -функция, $r \geq 3$, удовлетворяющая для любого $x \in I$ условию (2) и условию $f(S_L)f(S_R) \neq 0$, где $S_L := (0, 0)$, $S_R := (1, 0)$. Множество таких уравнений обозначим $DE_2^r = DE_2^r(I)$. Под траекториями уравнения будем понимать траектории векторного поля $\vec{f} = y\partial/\partial x + f(x, y)\partial/\partial y$ на фазовом пространстве – прямоугольнике $\Phi := I \times [-R, R]$. Если $f(S_L) < 0$ ($f(S_R) > 0$), то точка S_L (S_R) является целой траекторией. Если $f(S_L) > 0$ ($f(S_R) < 0$), то положительную и отрицательную полутраектории, начинающиеся в точке S_L (S_R), назовем соответственно *выходящей* и *входящей сепаратрисой* этой точки.

Грубость и первую степень негрубости для уравнений из $DE_2^r(I)$ определим так же, как для уравнений из $DE_2^r(S^1)$. Обозначим $\Sigma DE_2^r = \Sigma DE_2^r(I)$ множество уравнений из $DE_2^r(I)$, имеющих только гиперболические особые точки и замкнутые траектории и не имеющих сепаратрис, идущих из седла или точки S_L в седло или в точку S_R . Множество ΣDE_2^r открыто и всюду плотно в DE_2^r , а уравнение $f_0 \in DE_2^r$ является грубым тогда и только, когда оно принадлежит множеству ΣDE_2^r .

Обозначим $\tilde{\Sigma}_1 DE_2^r = \tilde{\Sigma}_1 DE_2^r(I)$ множество негрубых уравнений из $DE_2^r(I)$, удовлетворяющих условиям 1) – 4), Д1) и Д2) со следующими дополнениями. В случае 1) сепаратриса L может идти из седла или точки S_L в седло или точку S_R . В условии Д1) надо добавить отсутствие сепаратрис точек S_L и S_R либо ω -предельных, либо α -предельных к контуре $L \cup \{S_0\}$. В условии Д2) надо дополнительно считать, что двойной цикл не является и ω -предельным и α -предельным множеством для сепаратрис точек S_L и S_R .

Теперь утверждения теорем 1 и 2 остаются верными и для пространства $DE_2^r = DE_2^r(I)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А. Грубые системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247– 251.

2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 487 с.
3. *Peixoto M.M.* Structural stability on two-dimensional manifolds // *Topology*. 1962. Vol. 1, no. 2. P. 101–120.
4. *Hayashi S.* Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1 -Stability and Ω -Stability Conjectures for Flows // *Annals of Mathematics. Second Series*. 1997. Vol. 145, no. 1. P. 81–137.
5. *Robinson C.* Structural stability of vector fields // *Annals of Mathematics. Second Series*. 1974. Vol. 99, no. 1. P. 154–175.
6. *Abraham R.* Non-genericity of Ω -stability / R. Abraham, S. Smale // *Global Analysis, Proc. of Symposia in Pure Mathematics*. 14. Publ. Am. Math. Soc. 1970. P. 5–8.
7. *Арансон С.Х.* Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону полутраекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному предельному циклу, у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях // *Матем. сб.* 1968. Т. 76 (118), № 2. С. 214–230.
8. *Арансон С.Х.* О неплотности полей конечной степени негрубости в пространстве негрубых векторных полей на замкнутых двумерных многообразиях // *УМН*. 1988. Т. 43, вып. 1(259). С. 191–192.
9. *Ройтенберг В.Ш.* О типичных полиномиальных векторных полях на плоскости // *Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки»*. 2014. Вып. 4 (147). С. 13–21.
10. *Ройтенберг В.Ш.* О типичных однородных векторных полях на плоскости // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2018. № 2. С. 15–26.
11. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях однородных полиномиальных векторных полей на плоскости // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика*. 2019. Т. 51, № 2. С. 34–43.
12. *Ройтенберг В.Ш.* Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно конечной группы вращений // *Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки»*. 2018. № 3 (226). С. 13–19.
13. *Ройтенберг В.Ш.* Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы вращений // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика*. 2018. Т. 50, № 4. С. 398–404.
14. *Ройтенберг В.Ш.* Векторные поля на плоскости с центральной симметрией: грубость и первая степень негрубости вращений // *Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки»*. 2021. № 2 (281). С. 27–39.
15. *Ройтенберг В.Ш.* Грубые дифференциальные уравнения второго порядка // *Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр.* Вып. 4. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2004. С. 55–65.
16. *Ройтенберг В.Ш.* О типичных полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности // *Сибирские электронные математические известия*. 2020. Т. 17. С. 2122–2130.

17. *Ройтенберг В.Ш.* О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, не имеющих особых точек // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, Механика Физика» 2020. Т. 12, №. 4. С. 33–40.
18. *Ройтенберг В.Ш.* О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, имеющих первую степень негрубости // Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 1. С. 40–50.
19. *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем. Введение: пер. с англ. / Ж. Палис, В. Мело. М.: Мир, 1986. 301 с.
20. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркационных многообразиях коразмерности один в пространстве дифференциальных уравнений второго порядка // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 4. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2004. С. 65–75.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 51:378

Л. В. Белякова, Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова

Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail: liubov.belyakova@yandex.ru,*
gulevich.nikolay@gmail.com, kvo_kuz@mail.ru

ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

В данной статье рассматривается применение теоремы Штольца и метода интегральных сумм для нахождения пределов последовательностей. Материалы статьи можно использовать на занятиях студенческого математического кружка, при подготовке к математическим олимпиадам. Статья содержит новый результат – обобщение теоремы Штольца на случай комплексных последовательностей.

Ключевые слова: теорема Штольца, интегральная сумма Римана, предел последовательности

L. V. Belyakova, N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, *e-mail: liubov.belyakova@yandex.ru, gule-*
vich.nikolay@gmail.com, kvo_kuz@mail.ru

STOLZ 'S THEOREM AND ITS GENERALIZATIONS

This article discusses the application of Stolz's theorem and the method of integral sums to find the limits of sequences. The materials of the article can be used in the classes of the mathematical circle, in preparation for mathematical Olympiads. The article contains a new result – a generalization of Stolz's theorem to the case of a complex sequence.

Keywords: Stolz's theorem, Riemann integral sum, the limit of the sequence

Отто Штольц (03.07.1842, Халль-ин-Тироле – 23.11.1905, Инсбрук) – австрийский математик. Учился в университетах Инсбрука и Вены, где в 1867 г. защитил докторскую диссертацию по геометрии. С 1869 г. по 1871 г. О. Штольц совершенствовал свои знания в Берлине и Гёттингене у знаменитых немецких математиков: К. Вейерштрасса, Л. Кронекера, Э.Э. Куммера, Ф. Клейна. Под влиянием К. Вейерштрасса увлекся математическим анализом. С 1872 г. профессор Инсбрукского университета, позднее ректор. Член Австрийской и Баварской академий наук. Научные труды по математическому анализу, геометрии, арифметике, алгебре, теории функций. В 1885 г. в [5] опубликовал свою теорему, которая известна сейчас как «теорема Штольца». Эта теорема является аналогом правила Лопиталья для последовательностей.

Теорема 1 (О. Штольц). Пусть x_n, y_n – такие последовательности, что $y_{n+1} > y_n$, $n = 1, 2, \dots$, $y_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a. \text{ Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Доказательство (см. [1, с. 44-45] и [4]). Не умаляя общности, можно считать, что $y_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $x_0 = y_0 = 0$. По условию

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = a + \alpha_k, \text{ где } \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \text{ Тогда}$$

$$x_k - x_{k-1} = a(y_k - y_{k-1}) + \alpha_k(y_k - y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = a \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \alpha_k (y_k - y_{k-1}) = ay_n + \sum_{k=1}^n \alpha_k (y_k - y_{k-1});$$

$$\frac{x_n}{y_n} = a + \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^n \alpha_k (y_k - y_{k-1}).$$

Осталось показать, что $\frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^n \alpha_k (y_k - y_{k-1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Зафиксируем

произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем номер N так, чтобы $|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k > N$. За-

тем выберем номер $N' > N$ так, чтобы $y_{N'} > \frac{2M \cdot y_N}{\varepsilon}$, где $M = \max_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|$. То-

гда при любом $n > N'$

$$\left| \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^n \alpha_k (y_k - y_{k-1}) \right| \leq \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| (y_k - y_{k-1}) + \frac{1}{y_n} \sum_{k=N+1}^n |\alpha_k| (y_k - y_{k-1}) <$$

$$< \frac{M}{y_n} \sum_{k=1}^N (y_k - y_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2y_n} \sum_{k=N+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \frac{M \cdot y_N}{y_n} + \frac{\varepsilon}{2y_n} (y_n - y_N) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Теорема доказана. ■

Замечание. Очевидно, в теореме Штольца вместо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ можно поставить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$.

Покажем, как применяется теорема Штольца на различных мерах.

Теорема 2. Если x_n — ограниченная последовательность, то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(x_{n+1} - x_n)]$ равен нулю или не существует.

Доказательство. Достаточно проверить, что из существования $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(x_{n+1} - x_n)]$ вытекает, что этот предел равен нулю. Пусть

$\lim_{n \rightarrow \infty} [n(x_{n+1} - x_n)] = a$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} [n(x_{n+1} - x_n)] = a .$$

Поскольку x_n — ограниченная последовательность, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 0$.

Применяя к последовательности $\frac{x_n}{\ln n}$ теорему Штольца, получим

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [n(x_{n+1} - x_n)] = a . \quad \blacksquare$$

Замечание. То, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(x_{n+1} - x_n)]$ может и не существовать, видно на примере последовательности $x_n = (-1)^n n^{-1}$.

Применим теорему Штольца для вычисления предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^\alpha} - \frac{n}{\alpha + 1} \right) \quad (1)$$

при всех допустимых значениях вещественного параметра α .

При $\alpha < -1$ предел, очевидно, равен $+\infty$. Если $\alpha \in (-1, 0)$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^\alpha} - \frac{n}{\alpha + 1} = \left(1 + \frac{1}{2^{-\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{-\alpha}}\right) n^{-\alpha} - \frac{n}{\alpha + 1} \leq \\ & \leq \left(1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{-\alpha}}\right) n^{-\alpha} - \frac{n}{\alpha + 1} = \left(1 + \frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}\right) \cdot n^{-\alpha} - \frac{n}{\alpha + 1} = \frac{\alpha n^{-\alpha}}{\alpha + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty. \end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ предел, очевидно, равен 0. Рассмотрим основной случай: $\alpha > 0$.

Положим $x_n = (\alpha + 1)(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha) - n^{\alpha+1}$, $y_n = (\alpha + 1)n^\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^\alpha} - \frac{n}{\alpha + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + 1)(n + 1)^\alpha - (n + 1)^{\alpha+1} + n^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)((n + 1)^\alpha - n^\alpha)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + 1) \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} + 1}{(\alpha + 1) \frac{1}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((\alpha + 1)x(1+x)^\alpha - (1+x)^{\alpha+1} + 1\right)'}{\left((\alpha + 1)x\left((1+x)^\alpha - 1\right)\right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\alpha + 1)x(1+x)^{\alpha-1}}{(\alpha + 1)\left((1+x)^\alpha - 1 + \alpha x(1+x)^{\alpha-1}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} \cdot \frac{1}{(1+x)^{\alpha-1}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Замечание. Предел (1) для частного случая $\alpha \geq 1$ предлагался в качестве одной из задач на Международной математической олимпиаде Северных стран (ИТМО, 2022 г.). Причём решение с применением интегральных сумм, предложенное жюри олимпиады, было очень громоздким.

Покажем, что теорема Штольца может быть применена и для вычисления пределов двойных и тройных сумм.

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{nj+i} \right)$.

Пусть $s_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{nj+i}$. Тогда $s_n = x_{n^2+n} - x_n$, где $x_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$. Применя-

няя теорему Штольца к последовательностям x_n и $y_n = \ln n$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{-1}}{\ln(1+n^{-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{-1}}{n^{-1}} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n^2+n}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2+n)}{\ln n} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right) - 1 = 1.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{i^2+j^2}} \right)$.

Пусть $a_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i^2+j^2}}$. Тогда по теореме Штольца

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{i^2+j^2}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} - \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}} \cdot \frac{1}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}n} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(3+2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}} \cdot \frac{1}{n} \right)$ – интегральная сумма для непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ с рангом разбиения $\lambda = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j} \right)$.

Пусть $a_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j}$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} - \frac{1}{2n} \right) = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+(i/n)} \cdot \frac{1}{n} \right) = 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 2 \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 4. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{i+j+k} \right)$.

Пусть $a_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{i+j+k}$, $b_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j+n}$, $c_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+2n}$,

$d_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{i+j+k} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n^2 - (n-1)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3b_n + r_n}{2n} \cdot \frac{2n}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b_n + r_n}{2n}, \end{aligned}$$

где $r_n = -3c_n + (3n)^{-1}$. Поскольку $0 < c_n < \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{2n} = 0$. Нетрудно проверить, что $b_n - b_{n-1} = 3c_n - d_n - (3n(3n-1))^{-1}$. Применяя теорему Штольца повторно, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{n - (n-1)} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3c_n - d_n - (3n(3n-1))^{-1} \right) = \\ &= \frac{9}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2+i/n} \cdot \frac{1}{n} \right) - \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+i/n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{dx}{2+x} - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \\ &= \frac{9}{2} \ln(2+x) \Big|_0^1 - \frac{3}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 = \frac{9}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{9}{2} \ln 3 - 6 \ln 2. \end{aligned}$$

Замечание. Выражение $\frac{b_n}{n}$ можно было интерпретировать и как двумерную интегральную сумму для непрерывной на квадрате $\{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ функции $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y}$ с рангом разбиения $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{n} \rightarrow 0$. Переходя к пределу и вычисляя полученный двойной интеграл, придем к тому же результату:

$$\frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1+i/n+j/n} \cdot \frac{1}{n^2} \right) = \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1+x+y} = \dots = \frac{9}{2} \ln 3 - 6 \ln 2.$$

Пример 5. (6th North Countries Universities Mathematical Competition, СПб ИТМО, 28.04.19). Let $a_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + j^2}$. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\ln n}$.

Решение. По теореме Штольца

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n-1) \left(2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + n^2} - \frac{1}{2n^2} \right) \right] = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(i/n)^2 + 1} \cdot \frac{1}{n} \right) = 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(i/n)^2 + 1} \cdot \frac{1}{n} \right)$ – интегральная сумма для непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ с рангом разбиения $\lambda = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Замечание. Отметим, что применение теоремы Штольца делает решение этой задачи доступным для студентов первого курса. Решение, представленное оргкомитетом 6-th NCUMC¹, значительно сложнее и использует громоздкие оценки сумм двойными интегралами.

Покажем, что теорему Штольца можно обобщить на случай комплексных последовательностей.

Теорема 3. Пусть $x_n = a_n + ib_n$ – комплексная последовательность, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, а y_n – вещественная последовательность такая, что $y_{n+1} > y_n$, $n = 1, 2, \dots$, $y_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, и существует (конечный или бесконечный) предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$. Тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ и выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

¹ URL: <http://mathdep.ifmo.ru/ncumc/wp-content/uploads/2016/12/problems-NCUMC-2019.pdf>

Доказательство. Поскольку предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ существует, то существуют и пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{y_{n+1} - y_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{y_{n+1} - y_n}$. Тогда по теореме Штольца $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{y_{n+1} - y_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{y_{n+1} - y_n}$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{y_{n+1} - y_n} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{y_n} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}. \blacksquare$$

Пример 6. Если z_n — комплексная последовательность и $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$, то $\frac{z_1 + \dots + z_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$.

Действительно, пусть $x_n = z_1 + \dots + z_n$. Тогда по теореме 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Пример 7. Если z_n — комплексная последовательность и $nz_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$, то $\frac{z_1 + \dots + z_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$.

Действительно, пусть $x_n = z_1 + \dots + z_n$. Тогда по теореме 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)z_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n-1)}{n} \cdot (nz_n) \right] = z_0. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть x_n и y_n — комплексные последовательности такие, что $|y_{n+1}| > |y_n|$, $n = 1, 2, \dots$, $|y_n| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \bar{y}_n - x_{n-1} \bar{y}_{n-1}}{|y_n|^2 - |y_{n-1}|^2} = z$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = z$.

Доказательство. По теореме 3 получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \bar{y}_n}{|y_n|^2} = z$.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \bar{y}_n}{|y_n|^2} = z$. \blacksquare

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+j)^2}$.

2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + j^2 + k^2}$.

3. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i+j+k}{i^2 + j^2 + k^2}$.

4. Пусть z_n – ограниченная комплексная последовательность. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n (z_n - z_{n-1})$ при условии, что он существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Г.И.* Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. М.: Дрофа, 2003. 640 с.
2. *Гулевич Н.М.* Теорема Штольца / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Вып. 9. СПб.: ВИТУ, 2007. С. 56–59.
3. *Тарасов В.Н.* Теорема Штольца и ее применение // Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». СПб.: ВИТУ, 1999. С. 34–36.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, СПб.: ЛАНЬ, 2019. 608 с.
5. *Stolz O.* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: nach den Neueren Ansichten. Leipzig; Teubners, 1885. S. 173–175.

УДК 51:378

Л. В. Березина, А. В. Васильева, А. И. Бурцев

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: *berezina_lv@pisem.net*,
vasileva@rsatu.ru, *byrzev@rsatu.ru*,

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШАЕМОСТИ ОДНОГО ИЗ ВИДОВ ЗАДАЧ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ НА ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ

В статье представлен сравнительный анализ результатов решения задач одинаковой тематики, предложенных в разные годы на Всероссийской студенческой математической олимпиаде, проводимой на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А. Соловьева", г. Рыбинск.

Ключевые слова: олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка

L. V. Berezina, A. V. Vasileva, A. I. Burzev

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: *berezina_lv@pisem.net*,
vasileva@rsatu.ru, *byrzev@rsatu.ru*

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE SOLVABILITY OF ONE OF THE TYPES OF PROBLEMS OFFERED AT THE ALL-RUSSIAN STUDENT MATHEMATICAL OLYMPIAD

The article presents a comparative analysis of the results of solving problems on the same topic, proposed in different years at the All-Russian Student Mathematical Olympiad, held on the basis of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Rybinsk State Aviation Technical University named after P.A. Solovyov", Rybinsk.

Keywords: olympiad problems, scientific creativity of students, mathematical training

Для сравнительного анализа были выбраны задачи, основанные на тематике курса «Матричная алгебра». Рассматриваемые задачи были пред-

ложены для решения студентам первого курса на Всероссийской студенческой математической олимпиаде, проводимой на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А. Соловьева", г. Рыбинск. С одной стороны, матричная алгебра не изучается в школе, с другой – к моменту проведения олимпиады (начало декабря) этот раздел математики уже пройден всеми студентами и курсантами первого года обучения. Поэтому уровень решения таких задач наглядно демонстрирует подготовленность первокурсников по материалам, изучаемым в учебных заведениях высшей школы. Условия задач представлены ниже.

Задача олимпиады 2021 года. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с действительными элементами, удовлетворяющая условиям $AA^T = E$ и $A^5 = E$, где E – единичная матрица. Найти число таких матриц и все такие матрицы.

Задача олимпиады 2022 года. Найдите определитель n -го порядка, у которого на побочной диагонали стоит b , вне неё a .

Задача олимпиады 2023 года. Матрица A – квадратная матрица порядка 2023, каждый из элементов которой равен целому нечетному числу. Может ли определитель матрицы A быть равным 2023?

В табл. 1–3 представлены статистические характеристики, полученные по набранным баллам при решении задач по каждому году и для различных номинаций участников. Решение задачи оценивалось целым числом баллов от 0 до 10 в зависимости от правильности и полноты представленного решения.

Таблица 1. Данные по 2021 году

Номинация	Математические специальности	Технические специальности	Курсанты высших военных училищ
Средний балл	2,6	0,5	1
Максимальный набранный балл	10	4	3
Процент участников, набравших 9 или 10 баллов	13	0	0

Таблица 2. Данные по 2022 году

Номинация	Математические специальности	Технические специальности	Экономические специальности	Курсанты высших военных училищ
Средний балл	1,6	1,5	0,43	1
Максимальный набранный балл	10	8	4	4
Процент участников, набравших 9 или 10 баллов	7	0	0	0

Таблица 3. Данные по 2023 году

Номинация	Математические специальности	Технические специальности	Экономические специальности	Курсанты высших военных училищ
Средний балл	5	4,3	1,5	1,4
Максимальный набранный балл	10	10	10	10
Процент участников, набравших 9 или 10 баллов	30	30	13	7

Анализ данных, представленных в таблицах, показывает, что большинство участников-первокурсников не очень хорошо справляются с задачами из раздела «Матричная алгебра». В 2022 году предложенная задача оказалась наиболее сложной, особенно для студентов нематематических специальностей. В 2023 году с задачей по данной тематике участники справились намного лучше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи IV межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этапа Всероссийской студенческой олимпиады) / М.А. Башкин, А.И. Бурцев, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. С. 61-73.
2. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска / А.И. Бурцев, М.А. Башкин, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. С. 51-56.
3. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ им. П.А. Соловьева / А.В. Васильева, Л.В. Березина, А.И. Бурцев, М.А. Башкин // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 58-67.

УДК 51:378

А. В. Васильева, Л. В. Березина, А. И. Бурцев

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net,
byrzev@rsatu.ru

**ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ИМЕНИ П.А. СОЛОВЬЕВА**

В статье представлены задачи Всероссийской студенческой математической олимпиады имени П.А. Соловьева среди курсантов высших военных училищ и студентов всех специальностей и направлений подготовки, обучающихся на первом курсе. Олимпиада проводилась на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А. Соловьева", г. Рыбинск.

Ключевые слова: олимпиада по математике, олимпиадные задания, подготовка студентов

A. V. Vasileva, L. V. Berezina, A. I. Burzev

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vasileva@rsatu.ru, berezina_lv@pisem.net,
byrzev@rsatu.ru

**OBJECTIVES OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT
MATHEMATICS OLYMPIAD NAMED AFTER P.A. SOLOVIEV**

The article presents the problems of the All-Russian Student Mathematical Olympiad named after P.A. Solovyov among cadets of higher military schools and students of all specialties and areas of training studying in their first year. The Olympiad was held on the basis of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Rybinsk State Aviation Technical University named after P.A. Solovyov", Rybinsk.

Keywords: Olympiad in mathematics, Olympiad tasks, student preparation

2 декабря 2023 года на базе РГАТУ им. П.А. Соловьева состоялась очередная Всероссийская студенческая математическая олимпиада имени

П.А. Соловьева [1–3]. Мероприятие проводилось для курсантов высших военных училищ и студентов всех специальностей и направлений подготовки, обучающихся на первом курсе. При составлении задач авторы традиционно опирались на разделы школьного курса математики, начало математического анализа, матричную алгебру, аналитическую геометрию. Отметим, что очередная Всероссийская студенческая математическая олимпиада для студентов второго и старших курсов проводилась Ярославским государственным техническим университетом в октябре 2023 г. [4].

Рассмотрим конкурсные задания и их решения.

Задача 1. Ежедневно Саша подходит к городским часам ровно в 19.00. Маша же появляется между 19.00 и 20.00 часами в тот момент времени, когда воображаемая биссектриса угла, образованного часовой и минутной стрелками, проходит на циферблате через цифру 6. В какой момент времени появляется Маша? (Ответ укажите с точностью до 1 минуты).

Решение: Минутная стрелка за одну минуту поворачивается на 6° ($360/60$), а часовая на $\frac{1}{2}$ градуса ($6/12$). Пусть в момент, когда появлялась Маша, минутная стрелка указывала x мин. Угол (в градусах) между минутной стрелкой и биссектрисой, направленной к цифре 6, в этот момент равен $180^\circ - 6^\circ x = (30 - x)6^\circ$. Угол между биссектрисой и часовой стрелкой

равен $\frac{180}{6} + \frac{1}{2}x = \frac{60+x}{2}$ градусов. По условию $(30 - x)6 = \frac{60+x}{2}$. Отсюда

$$x = \frac{300}{13} = 23 + \frac{1}{13} \approx 23 ..$$

Ответ: Маша появлялась в 19 ч 23 мин.

Задача 2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\sqrt{|x-1|-2}-2}$.

Решение: Функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно:

$$|x-1|-2-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x-1|-2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|-2 \leq -2, \\ |x-1|-2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x-1| \leq 0, \\ |x-1| \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x-1 \leq -4, \\ x-1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x \leq -3, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty, -3] \cup \{1\} \cup [5, +\infty)$.

Задача 3. Решите уравнение $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|)$.

Решение: Рассмотрим функции

$$f(x) = 2^{-|x|} \text{ и } g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|).$$

Эти функции четные. Для f это очевидно, а для g имеем

$$g(-x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|-x+1| + |-x-1|) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x-1| + |x+1|) = g(x).$$

Так как $f(0) = 1$, $g(0) = 1/\sqrt{2}$, то $x = 0$ не является корнем уравнения. Так как f и g – функции четные, то если $x = a$ является решением уравнения, то $x = -a$ тоже является решением уравнения. Найдем положительные решения уравнения.

Поскольку

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ 2^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{2}}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x}{\sqrt{2}}, & x \geq 1, \end{cases}$$

то на интервале $[0, +\infty)$ f – строго убывающая функция, g – неубывающая функция. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на этом интервале единственное положительное решение. Так как

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то уравнение имеет единственное положительное

решение $x = \frac{1}{2}$ и одно отрицательное $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \pm \frac{1}{2}$.

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3 \end{cases}$$

в положительных действительных числах.

Решение:

$$\begin{cases} 0 \leq (x_i - 1)^2 = x_i^2 - 2x_i + 1, \\ x_i > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i + \frac{1}{x_i} \geq 2, \\ x_i > 0. \end{cases}$$

причем равенство достигается только при $x_i = 1$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + \dots + x_n + \frac{1}{x_n} = 6.$$

С другой стороны, $x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + \dots + x_n + \frac{1}{x_n} \geq 2n$. Отсюда $n \leq 3$.

Рассмотрим три случая.

1) $n = 1$. Система $\begin{cases} x_1 = 3, \\ \frac{1}{x_1} = 3 \end{cases}$ не имеет решения.

2) $n = 2$. Система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 x_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$, имеющего корни $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ и $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Если $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, то $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Если $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, то $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

3) $n = 3$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{1}{x_3} = 6.$$

Если хотя бы для одного i $x_i \neq 1$, то $x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{1}{x_3} > 6$.

Следовательно, в случае 3) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Ответ: При $n = 2$ два решения $\begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \end{cases}$

при $n = 3$ $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. При $n > 3$ и $n = 1$ система не имеет решений.

Задача 5. Матрица A – квадратная матрица порядка 2023, каждый из элементов которой равен целому нечетному числу. Может ли определитель матрицы A быть равным 2023?

Решение: Пусть A – квадратная матрица порядка n . Методом математической индукции покажем, что при $n \geq 2$ $\det A$ – чётное число. При $n = 2$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2k+1 & 2l+1 \\ 2m+1 & 2n+1 \end{vmatrix} = (2k+1)(2n+1) - (2l+1)(2m+1) = 2s -$$

чётное число. При $n = k + 1$, раскладывая определитель порядка $k + 1$ по первой строке, получим, что он является линейной комбинацией с целыми коэффициентами определителей порядка k , которые по предположению индукции – четные числа. Сумма четных чисел – четное число. Следовательно, определитель порядка $k + 1$ – четное число. Но 2023 не является четным числом.

Ответ: нет, не может.

Задача 6. В треугольнике OAB из вершины O проведены медиана OM и биссектриса OF . Записать разложение векторов \overline{OM} и \overline{OF} по базису $(\overline{a}, \overline{b})$, $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$.

Решение: Диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам, и потому $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$.

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{CA}|} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ и, следовательно,

$\overline{BC} = k\overline{CA}$ с $k = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$. Подставляя векторы $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$ и $\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC}$ в равенство $\overline{BC} = k\overline{CA}$, получим $\overline{OC} - \overline{OB} = k(\overline{OA} - \overline{OC})$.

Следовательно, $\overline{OC} = \frac{1}{1+k} \overline{OB} + \frac{k}{1+k} \overline{OA}$. Так как $\frac{1}{1+k} = \frac{|a|}{|a|+|b|}$,

$$\frac{k}{1+k} = \frac{|b|}{|a|+|b|}, \text{ то в итоге получаем } \overline{OC} = \frac{|b|}{|a|+|b|} \bar{a} + \frac{|a|}{|a|+|b|} \bar{b}.$$

$$\text{Ответ: } \overline{OM} = \frac{1}{2} \bar{a} + \frac{1}{2} \bar{b}, \quad \overline{OC} = \frac{|b|}{(|a|+|b|)} \bar{a} + \frac{|a|}{(|a|+|b|)} \bar{b}.$$

Задача 7. Известно, что $a + b + c = 12$.

1) Докажите, что $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+4} + \sqrt{c^2+4} \geq 13$.

2) Можно ли в неравенстве из пункта 1) заменить знак нестрогого неравенства на знак строгого неравенства?

Решение: Рассмотрим векторы $\bar{x} = (1, a)$, $\bar{y} = (2, b)$, $\bar{z} = (2, c)$ на плоскости. Так как $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = (5, a+b+c) = (5, 12)$, то

$$|\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$13 = |\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| + |\bar{z}| = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{4+b^2} + \sqrt{4+c^2}. \text{ Пункт 1) доказан.}$$

2) Нельзя, так как, например, при $a = \frac{13}{5}, b = \frac{26}{5}, c = \frac{26}{5}$ имеем

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+4} + \sqrt{c^2+4} = 13.$$

Задача 8. Найдите наименьший член последовательности $u_n = (n^2 - 4n)(n+3)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 4x)(x+3)^2$. Так

$$f'(x) = (2x-4)(x+3)^2 + 2(x^2-4x)(x+3) = 2(x+3)(2x^2-3x-6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = \frac{3-\sqrt{57}}{4} \vee x_3 = \frac{3+\sqrt{57}}{4}, \text{ то } x_1 < 0 \text{ и } x_2 < 0,$$

$2 < x_3 < 3$. На интервале $(x_3, +\infty)$ $f'(x) > 0$, следовательно, функция f является возрастающей на этом интервале. Поэтому минимальное значение $u_n = f(n)$ возможно только при $n=1, 2, 3$. Так как $u_1 = -48$, $u_2 = -100$, $u_3 = -108$, то минимальное значение $u_n = f(n)$ равно.

Ответ: -108 .

Задача 9. Пусть $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Решение: Так как

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{2-1}{2!} + \frac{3-2}{3!} + \frac{4-3}{4!} + \dots + \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \\ &= \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \dots + \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1$.

Ответ: 1.

Задача 10. Найдите все функции, непрерывные на всей числовой оси \mathbb{R} и удовлетворяющие функциональному уравнению $f(2x) = 2f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть $x > 0$. Положим $x = 2^t$ и обозначим $v(t) = f(2^t)$. Тогда уравнение $f(2x) = 2f(x)$ примет вид $v(t+1) = 2v(t)$. Сделав замену $v(t) = 2^t p(t)$, получим $p(t+1) = p(t)$. Следовательно, $p(t)$ является периодической функцией с периодом 1. Таким образом, при $x > 0$ $f(x) = xp_2(\log_2 x)$, где $p_2(t)$ – произвольная периодическая функция с периодом 1 и непрерывная на \mathbb{R} . Аналогично доказывается, что при $x < 0$ $f(x) = xp_1(\log_2(-x))$, где $p_1(t)$ – произвольная периодическая функция с периодом 1 и непрерывная на \mathbb{R} . Из уравнения $f(2x) = 2f(x)$ следует $f(0) = 0$.

Покажем, что функция

$$f(x) = \begin{cases} xp_1(\log_2(-x)), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ xp_2(\log_2 x), & x > 0, \end{cases}$$

где функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – произвольные непрерывные на \mathbb{R} и периодические с периодом 1, является непрерывной на всей числовой оси. Функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ ограничены на \mathbb{R} некоторым числом M . Поэтому

$0 \leq |f(x)| \leq M|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$. По лемме о зажатой переменной $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, и функция f непрерывна в точке 0. Непосредственная подстановка функции f в уравнение $f(2x) = 2f(x)$ показывает, что функция f удовлетворяет данному уравнению.

$$\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} xp_1(\log_2(-x)), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ xp_2(\log_2 x), & x > 0, \end{cases} \text{ где функции } p_1(t) \text{ и } p_2(t) -$$

функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – произвольные непрерывные на \mathbb{R} и периодические с периодом 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи IV межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этапа Всероссийской студенческой олимпиады) / М.А. Башкин, А.И. Бурцев, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. С. 61-73.
2. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска / А.И. Бурцев, М.А. Башкин, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. С. 51-56.
3. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / А.В. Васильева, Л.В. Березина, А.И. Бурцев, М.А. Башкин // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 58-67.
4. Оленикова Ю.К. Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2023 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 73-85.

УДК 51:378

**Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов,
Л. В. Белякова, С. А. Старостина**

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru, liubov.belyakova@yandex.ru, sardana-starostina@mail.ru

ОЛИМПИАДЫ ГУМРФ ПО МАТЕМАТИКЕ В 2022-2023 УЧЕБНОМ ГОДУ

В данной статье рассматриваются задачи олимпиад по элементарной и высшей математике в Государственном университете морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова (ГУМРФ) в 2022-2023 учебном году.

Ключевые слова: олимпиадные задачи, студенческие математические олимпиады

**N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov,
L. V. Belyakova, S. A. Starostina**

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru, liubov.belyakova@yandex.ru, sardana-starostina@mail.ru

GUMRF OLYMPIADS IN MATHEMATICS IN THE 2022-2023 ACADEMIC YEAR

This article examines the problems of the Olympiads in elementary and higher mathematics at the Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping named after Admiral S.O. Makarov (GUMRF) in the 2022-2023 academic year.

Keywords: mathematical olympiad problem, student mathematical olympiad

В Государственном университете морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова (ГУМРФ) регулярно проводятся олимпиады по математике с межвузовским участием [1–7]. В 2022-2023 учебном году олимпиады проходили в дистанционном формате.

Основными целями и задачами олимпиад ГУМРФ по математике являются: формирование интереса к изучению высшей математики у пер-

вокурсников; популяризация научных знаний среди обучающихся, позволяющая участникам олимпиады максимально раскрыть свои интеллектуальные способности; выявление и привлечение способных обучающихся к подготовке и участию в олимпиадах по высшей математике различного уровня; стимулирование активного отношения к овладению компетенциями в изучении математики в соответствии с направлением профессиональной подготовки, а также развитие межвузовского сотрудничества с техническими вузами по обмену опытом в методике преподавания математики, в системе стимулирования и поощрения курсантов и студентов в изучении высшей математики как основе технических знаний.

**Задачи олимпиады первокурсников ГУМРФ
по элементарной математике и их решения
(27 сентября 2022 года)**

Задача 1. Сравните числа $27,09^{2022}$ и $2022^{27,09}$.

Решение. $2022 < 10^4$; $10 < 27,09$; $27,09 < 28 \Rightarrow$
 $2022^{27,09} < 10^{4 \cdot 27,09} < 10^{4 \cdot 28} = 10^{112}$; $27,09^{2022} > 10^{2022}$.

Ответ. $27,09^{2022} > 2022^{27,09}$.

Задача 2. Гном разбивает большой камень. После каждого его удара от камня откалываются 3 или 5 кусков с равной вероятностью 0,5. Найдите вероятность того, что после 501 удара от камня в сумме будет отколото 2022 куска.

Решение. Пусть m раз от камня отлетало по 3 куска и n раз – по 5 кусков. Тогда $3m + 5n = 2022$ и $m + n = 501$. Решая систему этих уравнений, получаем $2n = 519$, что невозможно.

Ответ. 0.

Задача 3. Велосипедист преодолевает 1 км на 8 минут быстрее, чем пешеход. Найдите скорости велосипедиста и пешехода, если известно, что сумма квадратов их скоростей равна 936 (км/ч)^2 .

Решение. Пусть $U, V \text{ (км/ч)}$ – скорости велосипедиста и пешехода соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{V} - \frac{1}{U} = \frac{8}{60}, \\ U^2 + V^2 = 936 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U - V = \frac{2}{15}UV, \\ (U - V)^2 + 2UV = 936. \end{cases}$$

Положим $x = U - V$, $y = UV$. Тогда $\begin{cases} 15x = 2y > 0, \\ x^2 + 2y = 936 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24, \\ y = 180. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} U - V = 24, \\ UV = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = 6, \\ U = 30. \end{cases}$

Ответ. $U = 30$ км/ч, $V = 6$ км/ч.

Задача 4. Найдите наибольший периметр среди треугольников, вписанных в окружность радиуса $R > 0$ и имеющих одну из сторон, равную $2R$.

Решение. Вписанный треугольник, одна из сторон которого является диаметром, является прямоугольным. Пусть a и b – катеты этого треугольника. Тогда $a^2 + b^2 = 4R^2$, а периметр треугольника равен $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Далее $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Причем $a + b = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ тогда и только тогда, когда $a = b = R\sqrt{2}$. Треугольник с такими катетами является вписанным в данную окружность. Значит, наибольший периметр равен $2(\sqrt{2} + 1)R$.

Задача 5. Решите неравенство $x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \leq 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2) = \\ &= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2] \leq 0 \Leftrightarrow x = y = 1. \end{aligned}$$

Задача 6. Пусть $|ax + b| \leq M$ для любых $x \in [-1, 1]$. Докажите, что $|ax + b| \leq \frac{M}{2}(|x - 1| + |x + 1|)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Решение. При $x = \pm 1$ получаем $|a \pm b| \leq M$. Поэтому

$$\begin{aligned} |ax + b| &= \left| \frac{a+b}{2}(x+1) + \frac{a-b}{2}(x-1) \right| \leq \frac{|a+b|}{2}|x+1| + \frac{|a-b|}{2}|x-1| \leq \\ &\leq \frac{M}{2}(|x+1| + |x-1|). \end{aligned}$$

Задача 7. Числа p и $p+2$ – простые и $p > 3$. Докажите, что $p+1$ делится на 6.

Решение. Так как p – нечетное число, то $p+1$ делится на 2. Далее, $p = 3k+r$, где $k \in \mathbb{N}$, а $r \in \{1, 2\}$. Но, если $r = 1$, то $p+2 = 3k+3$ делится на 3, что невозможно. Значит $r = 2$. Тогда $p+1 = 3k+3$ делится на 3, и, следовательно, $p+1$ делится на 6.

Задача 8. Даны 2022 вектора в пространстве, причем длина суммы любых 2021 векторов из них не больше 2021. Докажите, что длина суммы всех 2022 векторов не больше 2022. (Предполагая известным, что длина суммы n векторов, $n \in \mathbb{N}$, не превосходит суммы их длин).

Решение. Пусть $\vec{S} = \sum_{k=1}^{2022} \vec{a}_k$, где \vec{a}_k – данные векторы, $k = 1, 2, \dots, 2022$. Тогда $|2021\vec{S}| = |2022\vec{S} - \vec{S}| =$
 $= \left| (\vec{S} - \vec{a}_1) + \dots + (\vec{S} - \vec{a}_{2022}) \right| \leq |\vec{S} - \vec{a}_1| + \dots + |\vec{S} - \vec{a}_{2022}| \leq 2021 \cdot 2022.$

Задача 9. Решите неравенство $3|\operatorname{tg} x| - \log_{\pi/4}(x^2) > 1$ при $-\pi/2 < x < 0$.

Решение. $3|\operatorname{tg} x| - \log_{\pi/4}(x^2) > 1 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}|x| - 2(\ln(\pi/4))^{-1} \ln|x| > 1.$

Положим $|x| = t$. Поскольку

$$\left(3\operatorname{tg} t - 2(\ln(\pi/4))^{-1} \ln t \right)' = 3\cos^{-2} t - 2(t \ln(\pi/4))^{-1} > 0$$

на $(0; \pi/2)$, то функция $y = 3\operatorname{tg} t - 2(\ln(\pi/4))^{-1} \ln t$ строго возрастает на $(0; \pi/2)$. Кроме того, $y(\pi/4) = 1$, поэтому

$$3\operatorname{tg} t - \log_{\pi/4}(t^2) > 1 \Leftrightarrow t \in (\pi/4; \pi/2) \Leftrightarrow x \in (-\pi/2; -\pi/4).$$

Ответ. $x \in (-\pi/2; -\pi/4)$.

Задача 10. Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(x) = -\min_{-\infty < y < +\infty} (f(y) - xy)$ при всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение. Предположим, что такая функция $f(x)$ существует.

Сначала заметим, что если $p(x) \leq q(x)$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то $\min_{-\infty < x < +\infty} p(x) \leq \min_{-\infty < x < +\infty} q(x)$. Действительно, пусть

$$\min_{-\infty < x < +\infty} q(x) = q(x_0) \Rightarrow \min_{-\infty < x < +\infty} p(x) \leq p(x_0) \leq q(x_0) = \min_{-\infty < x < +\infty} q(x).$$

Для любых $x \in \mathbb{R}$ $\min_{-\infty < y < +\infty} (f(y) - xy) \leq f(x) - x \cdot x$, следовательно,

$$f(x) = - \min_{-\infty < y < +\infty} (f(y) - xy) \geq x^2 - f(x) \Rightarrow f(x) \geq x^2/2.$$

Далее, для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется $f(y) - xy \geq y^2/2 - xy = ((x-y)^2 - x^2)/2 \geq -x^2/2$.

Следовательно, $-f(x) = \min_{-\infty < y < +\infty} (f(y) - xy) \geq \min_{-\infty < y < +\infty} (-x^2/2) = -x^2/2$, по-

этому $f(x) \leq x^2/2$. Значит, $f(x) = x^2/2$. Проверим:

$$\min_{-\infty < y < +\infty} (f(y) - xy) = \min_{-\infty < y < +\infty} (y^2/2 - xy) = \min_{-\infty < y < +\infty} ((x-y)^2 - x^2)/2 = -x^2/2.$$

**Задачи олимпиады ГУМРФ по высшей математике
и их решения (24 марта 2023 года)**

Задача 1. Вычислите $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2023}$.

Решение. $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 20 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}, \dots$

Пусть $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & C_n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \cdot T = \begin{pmatrix} 2^n & C_n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 4 \cdot 2^n + 3C_n \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= T \cdot T^n = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & C_n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2C_n + 4 \cdot 3^n \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому $4 \cdot 2^n + 3C_n = 2C_n + 4 \cdot 3^n$ и $C_n = 4(3^n - 2^n)$.

Ответ. $T^{2023} = \begin{pmatrix} 2^{2023} & 4(3^{2023} - 2^{2023}) \\ 0 & 3^{2023} \end{pmatrix}$.

Задача 2. Пусть BD – высота треугольника ABC , в котором $|CA|=1$, $|CB|=2$, $\angle C = \arccos(3/4)$. Выразите вектор \overrightarrow{BD} через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$.

Решение. Обозначим $\vec{h} = \overrightarrow{BD}$, тогда вектор $\vec{b} + \vec{h} = \overrightarrow{CD}$ коллинеарен \vec{a} . Следовательно, $\vec{b} + \vec{h} = \lambda \vec{a}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, и $\vec{h} = \lambda \vec{a} - \vec{b}$. Так как \vec{h} ортогонален \vec{a} , то $(\lambda \vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, $\vec{h} = \frac{3}{2} \vec{a} - \vec{b}$.

Ответ. $\overrightarrow{BD} = (3/2)\vec{a} - \vec{b}$.

Задача 3. Луч света, исходящий из левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, отражается последовательно в точках A , B и C эллипса.

Найдите площадь треугольника ABC , где $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Решение. Угловым коэффициентом k касательной к эллипсу $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ в точке $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ равен $k = y'(x_0) = -\frac{3x_0}{4y_0} = -\frac{1}{2}$, где $x_0 = 1$, $y_0 = 3/2$. Поэтому угловым коэффициентом нормали к эллипсу в точке A равен 2 , и $y = 2(x-1) + 3/2$ – уравнение этой нормали. Решая уравнение $y = 2(x-1) + 3/2 = 0$, находим точку $P(1/4, 0)$ пересечения нормали с осью Ox .

Фокусами эллипса являются точки $F_1(-1, 0)$ и $F_2(1, 0)$. Непосредственно проверяется, что $\frac{AF_1}{F_1P} = \frac{AF_2}{F_2P} = 2$. Поэтому AP – биссектриса треугольника F_1AF_2 . Следовательно, отраженный от эллипса в точке A луч пойдет по прямой AF_2 и отразится в точке $B(1, -3/2)$.

В силу симметрии точек A и B относительно оси Ox , отраженный в точке B луч пройдет по прямой BF_1 :

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y-0}{-1,5-0} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}(x+1).$$

Подставляя полученное выражение для y в уравнение эллипса, найдем координаты точек пересечения прямой BF_1 с эллипсом. Получим

$$7x^2 + 6x - 13 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(7x+13) = 0.$$

Отсюда $C\left(-\frac{13}{7}, \frac{9}{14}\right)$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h_C = \frac{1}{2}(y_A - y_B)(x_A - x_C) = \frac{30}{7}$.

Ответ. $S_{ABC} = 30/7$.

Задача 4. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{2023+x}+1892} - x = 131$.

Решение. Положим $t = x + 131$. Тогда уравнение примет вид $\sqrt{\sqrt{t+1892}+1892} = t$. Решение этого уравнения получим, решая систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{t+1892}, \\ t = \sqrt{y+1892}, \\ y > 0, \quad t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = t+1892, \\ t^2 = y+1892, \\ y > 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Отсюда $y^2 - t^2 = t - y \Leftrightarrow (y-t)(y+t+1) = 0 \Leftrightarrow y = t$;

$$\sqrt{t+1892} = t \Leftrightarrow t^2 - t - 1892 = 0, \quad t > 0; \quad t = 44 \Rightarrow x = -87.$$

Найденный корень проверяем подстановкой в исходное уравнение.

Ответ. $x = -87$.

Задача 5. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln \ln(n+2023) - \ln \ln n) \ln n$.

Решение. $n(\ln \ln(n+2023) - \ln \ln n) \ln n =$
 $= n(\ln(\ln n + \ln(1+2023/n))) - \ln \ln n) \ln n =$
 $= n\left(\ln \frac{\ln n + \ln(1+2023/n)}{\ln n}\right) \ln n = n\left(\ln\left(1 + \frac{\ln(1+2023/n)}{\ln n}\right)\right) \ln n.$

Поскольку $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln \ln(n+2023) - \ln \ln n) \ln n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\ln\left(1 + \frac{\ln(1+2023/n)}{\ln n}\right)\right) \ln n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\ln(1+2023/n)}{\ln n} \cdot \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{2023}{n} = 2023. \end{aligned}$$

Ответ. 2023.

Задача 6. Найдите неопределенный интеграл $\int \min\{x^2, |x|\} dx$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Поскольку $x^2 \leq |x| \Leftrightarrow |x| \leq 1$, то

$$\min\{x^2, |x|\} = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Первообразными для функций $-x$, x^2 , x являются соответственно функции

$$F_1(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1, \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} + C_2, \quad F_3(x) = \frac{x^2}{2} + C_3.$$

Полагая $C_1 = 0$ и используя равенства $F_1(-1) = F_2(-1)$, $F_3(1) = F_2(1)$, последовательно находим $C_2 = -\frac{1}{6}$, $C_3 = -\frac{1}{3}$. Положим

$$F(x) = \begin{cases} -x^2/2, & x \leq -1, \\ (2x^3 - 1)/6, & -1 \leq x \leq 1, \\ (3x^3 - 2)/6, & x \geq 1. \end{cases}$$

Тогда функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси, причем $F'(x) = \min\{x^2, |x|\}$. Значит, она является первообразной для функции $\min\{x^2, |x|\}$.

Ответ. $F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная.

Задача 7. Найдите все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x) = f\left(\frac{24x+3}{2023}\right)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть $a = 24/2023$, $b = 3/2023$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(ax+b) = f(a(ax+b)+b) = f(a(a(ax+b)+b)+b) = \dots \\ &= f(a^n x + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b) = f(x_n), \end{aligned}$$

где $x_n = a^n x + \frac{b(1-a^n)}{1-a}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n x + \frac{b(1-a^n)}{1-a} \right) = \frac{b}{1-a}$, так как $a \in (0, 1)$.

Поскольку искомая функция непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, то переходя в равенстве $f(x) = f(x_n)$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$.

Ответ. $f(x) = C$, где $C \in \mathbb{R}$.

Задача 8. Пусть a и b – комплексные числа и $|ax + b| \leq M$ для любых $x \in [-1; 1]$. Докажите, что $|az + b| \leq \frac{M}{2}(|z + 1| + |z - 1|)$ для любого комплексного числа z .

$$\begin{aligned} \text{Решение. } |az + b| &= \left| \frac{a+b}{2}(z+1) + \frac{a-b}{2}(z-1) \right| \leq \\ &\leq \frac{|a+b|}{2}|z+1| + \frac{|a-b|}{2}|z-1| \leq \frac{M}{2}(|z+1| + |z-1|) \end{aligned}$$

поскольку $|a \pm b| \leq M$.

Задача 9. Не переставляя членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, изменим их знаки так, чтобы за 2023 положительных его членами следовало 2023 отрицательных и так далее. Исследуйте на сходимость полученный ряд.

Решение. Новый ряд имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$, где

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2023k+1}} + \frac{1}{\sqrt{2023k+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023k+2023}}.$$

Данный знакопеременный ряд сходится по признаку Лейбница, поскольку $a_k > a_{k+1}$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, так как

$$0 < a_k < \frac{2023}{\sqrt{2023k+1}}. \text{ Учитывая, что ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ расходится, получаем}$$

Ответ. Ряд сходится условно.

Задача 10. Решите задачу Коши $(x+1)(y''+4y)+2y'=0$,
 $y(0)=y'(0)=1$.

Решение. $(x+1)(y''+4y)+2y'=\left((x+1)y''+2y'\right)+4(x+1)y=$
 $=\left((x+1)y'+y\right)'+4(x+1)y=\left(\left((x+1)y'\right)'\right)+4(x+1)y.$

Для функции $z=(x+1)y$ получаем дифференциальное уравнение

$$z''+4z=0.$$

Тогда $z=C_1 \cos 2x+C_2 \sin 2x$, $y=(C_1 \cos 2x+C_2 \sin 2x)(x+1)^{-1}$.

$$y(0)=1 \Rightarrow C_1=1; y'(0)=1 \Rightarrow 2C_2-C_1=1 \Rightarrow C_2=1.$$

Ответ. $y=(\cos 2x+\sin 2x)(x+1)^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гулевич Н.М.* Олимпиада первокурсников ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова по элементарной математике / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов, С.А. Старостина // Сб. науч. ст. нац. науч.-практ. конф. проф.-препод. состава ФГБОУ ВО "ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова". СПб., 2018. Т.1. С. 124–128.
2. *Гулевич Н.М.* Олимпиада по высшей математике ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова в 2017-2018 учебном году / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов, С.А. Старостина // Сб. науч. ст. нац. науч.-практ. конф. проф.-препод. состава ФГБОУ ВО "ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова". СПб., 2018. Т.1. С. 128–136.
3. *Старостина С.А.* Дистанционная олимпиада первокурсников / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, Н.М. Кубенский // Информационные технологии в современном инженерном образовании: сб. трудов межвуз. науч.-практ. конф. СПб.: Изд-во ВИ (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО, 2020. С. 216–223.
4. *Старостина С.А.* Дистанционная олимпиада первокурсников ГУМРФ по элементарной математике в 2020 году / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Сб. науч. ст. нац. науч.-практ. конф. проф.-препод. состава ФГБОУ ВО "ГУМРФ им. адмирала С. О. Макарова". СПб., 2020. С. 314–319.
5. *Старостина С.А.* Методика подбора задач для дистанционной олимпиады по высшей математике и критерий оценивания их решений / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Специальная техника и технологии транспорта: сб. ст. Военного института (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО им. генерала армии А.В. Хрулева. СПб.: Изд-во ВИ (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО, 2020. Вып. 6. С. 260–268.
6. Дистанционная олимпиада ГУМРФ по высшей математике в 2021 году. Многовариантность решений / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов, Л.В. Белякова // Специальная техника и технологии транспорта: сб. ст. Военного института (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО им. генерала армии А.В. Хрулева. СПб.: Изд-во ВИ (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО, 2021. Вып. 11. С. 201–211.
7. Дистанционная олимпиада первокурсников ГУМРФ по элементарной математике в 2021 году / Л.В. Белякова, Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов, С.А. Старостина // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз: сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. С. 42–50.

УДК 519.6

А. Н. Жаров, И. Г. Минеичева

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: ZharovAN@ystu.ru, MineichevaIG@ystu.ru

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО ОДНОМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается методика изложения темы «Метод конечных элементов» для расчета стационарного одномерного температурного поля. Показано, что метод конечных элементов дает точное решение в тех задачах, где профиль температуры является линейным. Такими задачами, например, являются задачи, посвященные тепловой защите зданий и сооружений.

Ключевые слова: метод конечных элементов, приближенные методы теплопроводности

A. N. Zharov, I. G. Mineicheva

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: ZharovAN@ystu, MineichevaIG@ystu.ru

CALCULATION OF A STATIONARY ONE-DIMENSIONAL TEMPERATURE FIELD USING THE FINITE ELEMENT METHOD

The methodology for presenting the topic of the finite element method for calculating a stationary one-dimensional temperature field is considered. It is shown that the finite element method gives an exact solution in those problems where the temperature profile is linear. Such tasks, for example, are tasks devoted to thermal protection of buildings and structures.

Keywords: finite element method, approximate heat conduction methods

Известно, что методом конечных элементов можно успешно решать задачи теории упругости [1], теплопроводности, диффузии. Данный метод является весьма универсальным, удобным и довольно точным. Его проще всего реализовать в специализированных программах, таких как Autodesk Inventor, Solidworks, Ansys, и других похожих программах. Однако целью нашей работы являются методические аспекты применения метода конеч-

ных элементов к задачам определения одномерных температурных полей без использования САПР.

Пусть имеется бесконечная пластина, представленная на рис. 1. Толщину пластины обозначим L , коэффициент теплопроводности k , количество теплоты, выделяемое источниками в единице объема пластины, $q(x)$. Примем, что тепловой поток распространяется вдоль оси OX . На плоскостях пластины установились температуры T_1 и T_2 . Плотности теплового потока на плоскостях пластины обозначим j_1 и j_2 .

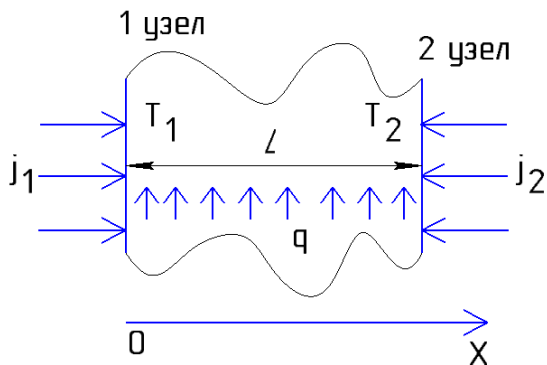


Рис. 1. Бесконечная теплопроводная пластина

Процесс теплопроводности описывается стационарным уравнением теплопроводности

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT(x)}{dx} \right) + q(x) = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = j_1, \quad -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = j_2 \quad (2)$$

и геометрическими условиями

$$T(0) = T_1, \quad T(L) = T_2. \quad (3)$$

Решение задачи (1)-(3) будем искать в приближенном виде

$$\hat{T}(x) = w_1(x) \cdot T_1 + w_2(x) \cdot T_2, \quad (4)$$

где $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – весовые функции.

Подставляя выражение (4) в геометрические условия (3), получим систему

$$\begin{cases} w_1(0) \cdot T_1 + w_2(0) \cdot T_2 = T_1; \\ w_1(L) \cdot T_1 + w_2(L) \cdot T_2 = T_2. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) будет верной, если весовые функции будут удовлетворять условиям

$$w_1(0) = 1, w_1(L) = 0, w_2(0) = 0, w_2(L) = 1. \quad (6)$$

Весовые функции, удовлетворяющие условиям (6), можно выбрать в виде

$$w_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad w_2(x) = \frac{x}{L}. \quad (7)$$

Невязка между приближенным $\hat{u}(x)$ и точным $u(x)$ решением уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\hat{T}(x)}{dx} \right) + q(x) \right) - \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT(x)}{dx} \right) + q(x) \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\hat{T}(x)}{dx} \right) + q(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения двух неизвестных T_1 и T_2 по методу минимизации невязок [2] составим систему уравнений

$$\begin{cases} \int_0^L w_1(x) \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\hat{T}(x)}{dx} \right) + q(x) \right) dx = 0; \\ \int_0^L w_2(x) \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\hat{T}(x)}{dx} \right) + q(x) \right) dx = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Уравнения системы (9) проинтегрируем по частям, учитывая геометрические условия (6) и граничные условия (2), получим

$$\begin{cases} j_1 - \int_0^L k \frac{d\hat{T}(x)}{dx} \frac{dw_1(x)}{dx} dx = - \int_0^L w_1(x) q(x) dx; \\ -j_2 - \int_0^L k \frac{d\hat{T}(x)}{dx} \frac{dw_2(x)}{dx} dx = - \int_0^L w_2(x) q(x) dx. \end{cases} \quad (10)$$

Примем, что $q(x) = \text{const} = q$. Подставив в систему (10) выражения (4) и (7), найдем

$$\begin{cases} \frac{k}{L} (T_1 - T_2) = \frac{qL}{2} + j_1; \\ \frac{k}{L} (-T_1 + T_2) = \frac{qL}{2} - j_2. \end{cases} \quad (11)$$

Систему (11) перепишем в матричном виде

$$\frac{k}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Lq}{2} \\ \frac{Lq}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_1 \\ -j_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Предположим теперь, что пластина разделена на три однородных элемента, как это показано на рис. 2. Толщины элементов обозначим L_1, L_2, L_3 . Температуры на гранях элементов обозначим T_1, T_2, T_3, T_4 . Количество теплоты, выделяемое источниками в единице объема элементов, обозначим q_1, q_2, q_3 . Плотности теплового потока для 1-го элемента обозначим j_{11} и j_{12} , для 2-го элемента – j_{21} и j_{22} , для 3-го элемента – j_{31} и j_{32} .

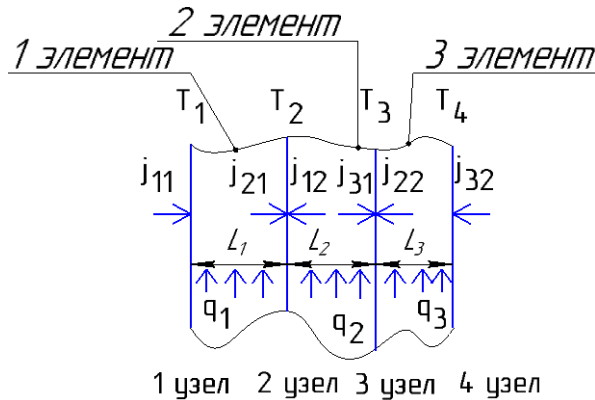


Рис. 2. Пластина, разделенная на три однородных элемента

Тогда для каждого элемента можно записать систему вида (12):

для 1-го элемента

$$\frac{k_1}{L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_1 q_1 \\ L_1 q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_{11} \\ -j_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (13)$$

для 2-го элемента

$$\frac{k_2}{L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 q_2 \\ L_2 q_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ j_{21} \\ -j_{22} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

для 3-го элемента

$$\frac{k_3}{L_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_3 q_3 \\ L_3 q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_{31} \\ -j_{32} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Сложим системы уравнений (13)-(15):

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1}{L_1} & -\frac{k_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{L_1} & \frac{k_1}{L_1} + \frac{k_2}{L_2} & -\frac{k_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{L_2} & \frac{k_2}{L_2} + \frac{k_3}{L_3} & -\frac{k_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{k_3}{L_3} & \frac{k_3}{L_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_1 q_1 \\ L_1 q_1 + L_2 q_2 \\ L_2 q_2 + L_3 q_3 \\ L_3 q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где обозначено $J_1 = j_{11}, J_2 = -j_{12} + j_{21}, J_3 = -j_{22} + j_{31}, J_4 = -j_{32}$.

Рассмотрим задачи о тепловой защите зданий и сооружений.

Задача 1. Предположим, что имеется трехслойная строительная конструкция (стена дома). Примем температуру воздуха на улице $T_4 = -20$ °С, плотность теплового потока изнутри помещения $J_1 = -J_4 = 24$ Вт/м². Первым слоем стены является железобетон толщиной $L_1 = 0,3$ м с коэффициентом теплопроводности $k_1 = 1,5$ Вт/(м·К), второй слой стены – это пенобетон толщиной $L_2 = 0,1$ м с $k_2 = 0,3$ Вт/(м·К), третий слой стены – пенополистирол толщиной $L_3 = 0,05$ м с $k_3 = 0,05$ Вт/(м·К).

Система (16) в условиях данной задачи примет вид

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В системе (17) есть три линейно независимых уравнения, и она имеет решение

$$T_1 = 16,8 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad T_2 = 12 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad T_3 = 4 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Найдем точное решение задачи.

Тепловое сопротивление всех элементов

$$R = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{23}{15} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{К}}{\text{Вт}}.$$

Тепловой напор между точками 1 и 4 и температура в точке 1:

$$\Delta T_{14} = T_1 - T_4 = J_1 R = 24 \frac{23}{15} = 36,8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$T_1 = 36,8 + T_4 = 36,8 - 20 = 16,8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Тепловой напор между точками 3 и 4 и температура в точке 3:

$$\Delta T_{34} = T_3 - T_4 = J_1 \frac{L_3}{k_3} = 24 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$T_3 = 24 + T_4 = 24 - 20 = 4 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Тепловой напор между точками 2 и 3 и температура в точке 2:

$$\Delta T_{23} = T_2 - T_3 = J_1 \frac{L_2}{k_2} = \frac{24}{3} = 8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$T_2 = 4 + T_3 = 4 + 8 = 12 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Сравнивая приближенное решение, полученное по методу конечных элементов, и точное решение задачи можно видеть, что они совпадают. Таким образом, в данном случае метод конечных элементов дает точное решение задачи.

Решая задачу 1, не учитывался конвективный перенос тепла у внутренней и внешней стен ограждающей конструкции. Для учета явлений конвекции примем

$$J_1 = \alpha_0(T_0 - T_1); \quad J_4 = -\alpha_4(T_4 - T_5), \quad (18)$$

где T_0 , T_5 – температура воздуха с одной и другой сторон стенки; α_0 и α_4 – коэффициенты теплоотдачи.

Подставляя выражения (18) в систему (16) и перенося неизвестные температуры в левую часть, получим

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1}{L_1} + \alpha_0 & -\frac{k_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{L_1} & \frac{k_1}{L_1} + \frac{k_2}{L_2} & -\frac{k_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{L_2} & \frac{k_2}{L_2} + \frac{k_3}{L_3} & -\frac{k_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{k_3}{L_3} & \frac{k_3}{L_3} + \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_1 q_1 \\ L_1 q_1 + L_2 q_2 \\ L_2 q_2 + L_3 q_3 \\ L_3 q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 T_0 \\ J_2 \\ J_3 \\ \alpha_4 T_5 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Задача 2. Примем, что имеется трехслойная строительная конструкция, описанная в задаче 1. Температура воздуха внутри помещения $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, температура воздуха на улице $T_5 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$, коэффициенты теплоотдачи $\alpha_0 = 8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C})$, $\alpha_4 = 23 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C})$.

Система (19) в условиях задачи 2 примет вид

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 0 \\ -460 \end{pmatrix};$$

Решение системы

$$T_1 = 17,06 \text{ }^\circ\text{C}; T_2 = 12,36 \text{ }^\circ\text{C}; T_3 = 4,53 \text{ }^\circ\text{C}; T_4 = -18,98 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Точное решение задачи

Суммарное тепловое сопротивление

$$R = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{\alpha_4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{23} = \frac{4697}{2760} \text{ (м}^2 \cdot \text{К)}/\text{Вт}.$$

Плотность теплового потока

$$J_1 = \frac{\Delta T_{05}}{R} = \frac{T_0 - T_5}{R} = \frac{40 * 2760}{4697} = 23,504 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Температура в точке 1:

$$T_1 = T_0 - \frac{J_1}{\alpha_0} = 20 - \frac{23,504}{8} = 17,06 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Температура в точке 2

$$T_2 = T_1 - \frac{L_1 J_1}{k_1} = 17,06 - \frac{23,504}{5} = 12,36 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Температура в точке 3

$$T_3 = T_2 - \frac{L_2 J_1}{k_2} = 12,36 - \frac{23,504}{3} = 4,53 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Температура в точке 4

$$T_4 = T_3 - \frac{L_2 J_1}{k_2} = 4,53 - 23,504 = -18,98 \text{ }^\circ\text{C}$$

или

$$T_4 = T_5 + \frac{J_1}{\alpha_4} = -20 + \frac{23,504}{23} = -18,98 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Сравнивая точное и приближенное решение, можно видеть, что они совпадают. Таким образом, в большинстве задач о тепловой защите зданий

и сооружений можно применять метод конечных элементов, не снижая точности расчетов.

Далее рассмотрим задачу, в которой присутствует конвективный отток тепла с поверхности тела.

Задача 3. Пусть имеется стержень длиной L , с коэффициентом теплопроводности k , на концах которого поддерживаются постоянные температуры T_1 и T_2 , количество теплоты, выделяемое источниками в единице объема стержня $q(x)$. Стержень находится в воздухе. Коэффициент теплоотдачи с поверхности стержня обозначим α . Температуру воздуха на бесконечности обозначим T_0 . Плотности теплового потока на концах стержня обозначим j_1 и j_2 .

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT(x)}{dx} \right) + q(x) - \alpha(T - T_0) &= 0; \\ -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} &= j_1; \quad -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = j_2; \\ T(0) &= T_1; \quad T(L) = T_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Проводя решение, подобно описанному формулами (4)-(10), найдем систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{k}{L} + \frac{\alpha L}{3} \right) T_1 + \left(\frac{\alpha L}{6} - \frac{k}{L} \right) T_2 = \frac{qL}{2} + \frac{\alpha T_0 L}{2} + j_1; \\ \left(\frac{\alpha L}{6} - \frac{k}{L} \right) T_1 + \left(\frac{k}{L} + \frac{\alpha L}{3} \right) T_2 = \frac{qL}{2} + \frac{\alpha T_0 L}{2} - j_2. \end{cases}$$

Разделив стержень на три равных одинаковых элемента длиной $l = L/3$, получим для температур систему

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{l} + \frac{\alpha l}{3} & \frac{\alpha l}{6} - \frac{k}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha l}{6} - \frac{k}{l} & 2 \left(\frac{k}{l} + \frac{\alpha l}{3} \right) & \frac{\alpha l}{6} - \frac{k}{l} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha l}{6} - \frac{k}{l} & 2 \left(\frac{k}{l} + \frac{\alpha l}{3} \right) & \frac{\alpha l}{6} - \frac{k}{l} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha l}{6} - \frac{k}{l} & \frac{k}{l} + \frac{\alpha l}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ql \\ 2ql \\ 2ql \\ ql \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha T_0 l \\ 2\alpha T_0 l \\ 2\alpha T_0 l \\ \alpha T_0 l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{pmatrix}.$$

Примем для числового расчета:

$$k = 0,1, l = 0,1 \text{ м}, \alpha = 21, T_1 = 10, T_4 = 30, T_0 = 20.$$

$$\begin{pmatrix} 1,7 & -0,65 & 0 & 0 \\ -0,65 & 3,4 & -0,65 & 0 \\ 0 & -0,65 & 3,4 & -0,65 \\ 0 & 0 & -0,65 & 1,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ T_2 \\ T_3 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 42 \\ 42 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ J_4 \end{pmatrix}; \quad (21)$$

Решая данную систему, найдем:

$$J_1 = -15,96 \text{ Вт/м}^2, T_2 = 18,40 \text{ }^\circ\text{С}, T_3 = 21,60 \text{ }^\circ\text{С}, J_4 = 15,96 \text{ Вт/м}^2.$$

Точное решение данной задачи имеет вид

$$T = T_0 + \frac{(T_2 - T_0)sh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} x\right) + (T_1 - T_0)sh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}}(L - x)\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{k}} L\right)}. \quad (22)$$

Из рис. 3 и расчетов проведенных по формулам (21) и (22), следует, что точное и приближенное решения задачи (20) отличаются незначительно.

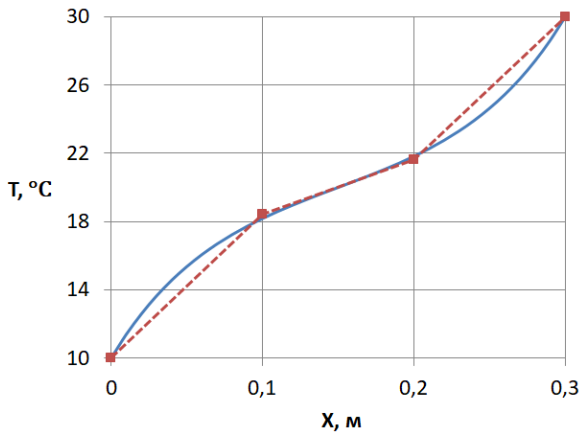


Рис. 3 Точное решение, определяемое формулой (22), (сплошная линия) и приближенное решение, полученное в ходе решения системы (21), (пунктирная линия) задачи (20)

В заключении отметим, что использование метода конечных элементов в учебных задачах определения стационарных одномерных температурных полей является несложным, имеет хорошую точность даже при весьма небольшом числе конечных элементов. Отдельно стоит отметить, что метод конечных элементов дает точное решение в тех задачах, где профиль температуры является линейным. Такими задачами являются задачи 1 и 2, посвященные тепловой защите зданий и сооружений. Также отметим, что для изучения данной темы слушатели должны знать линейную алгебру, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения и основы теплофизики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жаров А.Н.* Об изложении метода конечных элементов для расчета деформаций в стержневых системах / А.Н. Жаров, И.Г. Минеичева // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. С. 74-80.
2. *Лебедев А.В.* Численные методы расчета строительных конструкций: учеб. пособие. СПб.: СПбГАСУ, 2012. 55 с.

УДК 51:378

Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

**ЗАДАНИЯ И ИТОГИ ВСЕРОССИЙСКОЙ
СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
2023 ГОДА**

Приведены задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной Ярославским государственным техническим университетом в 2023 году, примеры их решения, а также итоги олимпиады и их анализ.

Ключевые слова: студенческая математическая олимпиада, решение задач

Ju. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

**TASKS AND RESULTS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT
OLYMPIADS IN MATH 2023**

We present the tasks of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics, held by Yaroslavl State Technical University in 2023, examples of their solutions, as well as the results of the Olympiad and their analysis.

Keywords: student mathematical Olympiad, task solution

Общие сведения о Ярославских олимпиадах сегодня

С начала проведения Всероссийских студенческих олимпиад (ВСО) по математике Ярославским государственным техническим университетом (ЯГТУ) прошло 24 года. За это время произошли существенные изменения в образовательном процессе России, что не могло не отразиться на олимпиадном движении. Например, пропали математические олимпиады для экономических специальностей после отмены бюджетных мест для этих специальностей во всех вузах, кроме экономических вузов, а в ряде олимпиад эта номинация находится тоже под угрозой исчезновения. Можно также утверждать, что падение престижа профессии учителя, в частности, математики и физики, привело к падению конкурсов среди поступающих в педагогические университеты на соответствующие профили. В результате практически пропали заявки от педагогических университетов на участие

в олимпиадах. Многие замечательные математические олимпиады по разным причинам вообще прекратили своё существование [1].

Ярославские олимпиады живут; теперь их ежегодно две. Одну олимпиаду по-прежнему проводят инициаторы и организаторы ВСО в Ярославле – преподаватели ЯГТУ, авторы настоящей статьи, которые и издали сборник задач студенческих олимпиад [3]. Второе издание было в 2015 году, после олимпиады 2024 года планируется третье издание. Вторую ВСО проводят наши последователи и соратники – преподаватели кафедры высшей математики Рыбинского государственного авиационного университета им. П.А. Соловьёва (РГАТУ). О проведенных олимпиадах они публикуют статьи в нашем сборнике [4, 5].

Следует отметить, что обе олимпиады сохраняют традиции и цели олимпиад: выявление талантливой молодёжи и повышение качества фундаментального образования в России [6, 7], а также оперативно реагируют на реалии времени. Учитывая перенасыщенность всевозможными мероприятиями в весенний семестр, ярославские олимпиады проводятся осенью [2].

Мы приняли в расчет и то, что в последнее время во многих вузах, не имеющих выпускающих математических кафедр, базовый курс математики преподается только на первом курсе. Поэтому для вовлечения первокурсников в олимпиадное движение с одобрения студентов и сообщества преподавателей-тренеров и руководителей команд мы уже второй год делим олимпиады по курсам. Преподаватели РГАТУ взяли на себя проведение ВСО для студентов 1-го курса и проводят олимпиаду в конце I семестра, а в ЯГТУ для студентов старших курсов и магистрантов в начале учебного года, активизируя таким образом олимпиадное движение.

Обе олимпиады проводятся по номинациям, определяемым вузом-организатором. Традиционно во многих вузах номинаций было три, которые кратко можно назвать: математические, технические и экономические специальности. В олимпиаде ЯГТУ кроме того приходится учитывать, что ранней осенью второкурсники – это «вчерашние» первокурсники и выделять их в отдельную номинацию [2].

Олимпиада ЯГТУ 2023 года

В отличие от ВСО 2022 года, которая в силу некоторых обстоятельств проводилась только для нематематических специальностей, в настоящей олимпиаде могли принимать участие студенты любого вуза и любой специальности в следующих номинациях: «Математические и естественные науки», «Технологии и технические науки», «Экономические нау-

ки и образование». В последней номинации предполагалось участие «экономистов» и «педагогов». Объединение, конечно, в некотором смысле искусственное. Это объясняется резким уменьшением заявок от данных специальностей, отмеченных выше. Однако, к сожалению, спасти ситуацию не удалось. Были поданы заявки только от двух вузов СПбГЭУ и НГПУ, практически постоянно направляющих своих студентов для участия в ВСО. При этом среди второкурсников оказалось 6 участников и 3 среди старшекурсников.

Всего в олимпиаде приняли участие 104 человека - представители 21 вуза десяти регионов и четырех федеральных округов России: Центрального, Северо-Западного, Сибирского и Приволжского. Это студенты и курсанты вузов, обучающиеся по программам бакалавриата, специалитета и магистратуры: 49 второкурсников и 55 старшекурсников.

Список вузов-участников олимпиады:

ВА ВКО (Тверь); ВА РВСН (Балашиха); ВА РХБЗ (Кострома); МГТУ им. Н.Э. Баумана, РТУ МИРЭА и НИУ МГСУ, НИЯУ МИФИ; РЭУ им. Г.В. Плеханова (Москва); НГТУ и НГПУ (Новосибирск); СПбГЭУ и ВКА им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург); ПГНИУ (Пермь); РГАТУ (Рыбинск); РГРТУ (Рязань); СамГТУ (Самара); ФВА РВСН (Серпухов); ВУРЭ (Череповец); ЯГТУ, ЯрГУ и ЯВВУ ПВО (Ярославль).

Учитывая опыт оставления задач для номинаций предыдущей олимпиады 2022 года, их расположения в заданиях, организацию проверки и апелляции, а также проведения сравнительного анализа решений общих задач второкурсниками и старшекурсниками, в этой олимпиаде мы решили оптимизировать всю работу и дать одинаковыми первые 8 задач, а номинации отразить в последних двух заданиях.

Это оказалось удобным, таблица получилась одна, и по ней каждый может увидеть, что его интересует. Напоминаем, что в соответствии с критериями оценки представленных решений, правильно решенными задачами мы считаем задачи, оцененные в 8, 9 и 10 баллов (8 и 9 ставятся за мелкие недочеты).

Далее представлены итоговая табл. 1 с долями правильно решивших задачи по номинациям, а также победители и призеры олимпиады. Задания и примеры их решения даны в конце статьи.

Таблица вполне красноречиво говорит о соотношении сил между второкурсниками и старшекурсниками, по крайней мере, в данной олимпиаде. А как закончились состязания между вузами, говорят награды, полученные победителями и призерами олимпиады.

Таблица 1. Доля правильно решивших задачи по номинациям «Математика и естественные науки», «Технологии и технические науки» и «Экономические науки и образование» (соответствующие обозначения: М, Т и Э+О)

Номер задачи	2-й курс			Старшие курсы		
	М	Т	Э+О	М	Т	Э+О
1.	36%	34%	17%	81%	30%	67%
2.	64%	31%	34%	77%	63%	0%
3.	21%	3%	0%	27%	13%	0%
4.	21%	13%	0%	54%	26%	67%
5.	7%	3%	0%	32%	7%	0%
6.	42%	37%	0%	5%	73%	0%
7.	7%	10%	0%	14%	43%	0%
8.	7%	0%	0%	32%	23%	0%
9.	14%	3%	0%	9%	3%	0%
10.	0%	0%	0%	14%	21%	0%

Победители и призеры олимпиады

Среди студентов 2-го курса

В номинации «Математика и естественные науки»

В личном конкурсе: I место – Беляев Я.Р. (РТУ МИРЭА), II место – Серафим М.В. (НИЯУ МИФИ), III место – Усатов М.В. (ПГНИУ).

В командном зачете: I место – РТУ МИРЭА, II место – НГТУ, III место – РЭУ им. Г.В. Плеханова и НИУ МГСУ.

В номинации «Технологии и технические науки»

В личном конкурсе: I место – Исаков Э.В. (РТУ МИРЭА); II место – Лебедь А.А. (ВАРВСН); III место – Галиаскаров Т.Д. (ВКА им. А.Ф. Можайского).

В командном зачете: I место – РТУ МИРЭА; II место – ВА РВСН; III место – ВКА им. А.Ф. Можайского.

В номинации «Экономические науки и образование»

В личном конкурсе: I место не присуждалось, II место – Сидоров А.А. (СПбГЭУ) и Шварц М.А. (НГПУ).

Среди студентов старших курсов

В номинации «Математика и естественные науки»

В личном конкурсе: I место – Баин Д.Д. (ЯрГУ), Макаров С.Д. (НИЯУ МИФИ) и Толстых В.А. (НГТУ); II место – Павлов С.А. (НГТУ) и Нифон-

тов Д.Р. (НИЯУ МИФИ); III место – Чирков М.А. (ЯрГУ), Брыгар О.А. (НИУ МГСУ), Бондаренко С.А. (НИЯУ МИФИ) и Яшин Н.Ю. (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

В командном зачете: I место – НИЯУ МИФИ; II место – ЯрГУ и МГТУ им. Н.Э. Баумана; III место – НИУ МГСУ и НГТУ.

В номинации «Технологии и технические науки»

В личном конкурсе: I место – Клинов Н.А. (НИЯУ МИФИ); II место – Косицына А.В. и Сапогов В.Р. (ЯГТУ); III место – Козлов В.В. (ВКА им. А.Ф. Можайского) и Усков Д.А. (НИЯУ МИФИ),

В командном зачете: I место – НИЯУ МИФИ; II место – ЯГТУ; III место – ВКА им. А.Ф. Можайского.

В номинации «Экономические науки и образование»

В личном конкурсе: I место не присуждалось; II место – Шваб А.А. (НГПУ); III место – Отт Д.А. (НГПУ).

Задачи олимпиады и примеры их решения

Задача 1. Найти матрицу, обратную к квадратной матрице n -го порядка $A = (a_{ik})$ с элементами $a_{ik} = 1$ при $k = i$ и $k = i + 1$, $a_{ik} = 0$ при $k < i$ и $k > i + 1$.

◀ Проверим, что $A^{-1} = B = (b_{kj})$, где $b_{kj} = 0$ при $j < k$, $b_{kj} = (-1)^{j-k}$ при $j \geq k$. В i -й строке j -м столбце матрицы AB стоит число $c_{ij} = a_{ii}b_{ij} + a_{i,i+1}b_{i+1,j} = b_{ij} + b_{i+1,j}$. При $j \leq i - 1$ $c_{ij} = 0 + 0 = 0$, при $j = i$ $c_{ii} = b_{ii} = 1$, при $j \geq i + 1$ $c_{ij} = (-1)^{j-i} + (-1)^{j-(i+1)} = 0$. То есть $AB = E$. Аналогично получаем, что $BA = E$. ▶

Ответ. $A^{-1} = B = (b_{kj})$, где $b_{kj} = 0$ при $j < k$, $b_{kj} = (-1)^{j-k}$ при $j \geq k$.

Задача 2. Написать уравнение биссектрисы угла $\angle A$ в треугольнике ABC , где $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(6,13)$.

Решение 1. ◀ Находим векторы

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} / |\overrightarrow{AB}| = (3/5, 4/5) \text{ и } \vec{c} = \overrightarrow{AC} / |\overrightarrow{AC}| = (5/13, 12/13).$$

Вектор $\vec{s} = \vec{b} + \vec{c} = (64/65, 112/65)$ является направляющим вектором биссектрисы угла $\angle A$. Поэтому уравнение биссектрисы имеет вид

$$\frac{x-1}{64} = \frac{y-1}{112} \text{ или } 7x - 4y - 3 = 0. \blacktriangleright$$

Решение 2. ◀ Биссектриса проходит через точку $N(x, y)$, делящую отрезок BC в отношении $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = 5/13$. Поэтому

$$x = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{4 + (5/13)6}{1 + 5/13} = \frac{41}{9}, \quad y = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \frac{5 + (5/13)13}{1 + 5/13} = \frac{65}{9}.$$

Векторы $\overrightarrow{AN} = (32/9, 56/9)$ и $\vec{s} = (9/8)\overrightarrow{AN} = (4, 7)$ направляющие для биссектрисы угла $\angle A$. Поэтому уравнение биссектрисы имеет вид

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{7}, \text{ или } 7x - 4y - 3 = 0. \blacktriangleright$$

Ответ. $7x - 4y - 3 = 0$.

Задача 3. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ с первым членом $x_1 = 3$ задана рекуррентной формулой $x_{n+1} = 3 - \frac{4}{x_n^2}$. Доказать, что предел последовательности существует и найти его.

◀ Если $x_n > 2$, то и $x_{n+1} = 3 - \frac{4}{x_n^2} > 3 - \frac{4}{2^2} = 2$. Поскольку $x_1 = 3 > 2$, то по индукции получаем, что все члены последовательности $x_n > 2$. Так как

$$x_n - x_{n+1} = x_n - 3 + \frac{4}{x_n^2} = \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 4}{x_n^2} = \frac{(x_n - 2)^2(x_n + 1)}{x_n^2} > 0,$$

то $\forall n \quad x_{n+1} < x_n$. Таким образом, последовательность убывает и ограничена снизу числом 2. Поэтому $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 2$. Переходя в равенстве

$$x_{n+1} = 3 - \frac{4}{x_n^2} \quad \text{к пределу, получаем} \quad a = 3 - \frac{4}{a^2}, \quad a^3 - 3a^2 + 4 = 0,$$

$$(a-2)^2(a+1) = 0, \quad a = 2. \blacktriangleright$$

Ответ. 2.

Задача 4. Найти все значения параметра p , при котором функция

$f(x) = (x-2)^2 + \frac{p}{x^2}$ имеет ровно четыре нуля.

◀ При $p = 0$ $f(x)$ имеет единственный нуль. При $p \neq 0$ функция $g(x) = x^2 f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + p$ имеет те нули, что и $f(x)$. Так как $g'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2)$, то для g $x_1 = 0$ точка минимума, $x_2 = 1$ точка мак-

сумма и $x_3 = 2$ точка минимума. Четыре нуля у g , а потому и у f , будет при $g(0) = g(2) = p < 0$ и $g(1) = p + 1 > 0$, то есть при $p \in (-1, 0)$. ►

Ответ. $p \in (-1, 0)$.

Задача 5. На кривой $4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2 = 0$ найти точку, наиболее удаленную от начала координат.

◀ В полярных координатах уравнение кривой имеет вид

$$2\rho^4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\rho(\cos\varphi - \sin\varphi) - 1 = 0, \quad 2\rho^3 - \frac{1}{\rho} = \sin(\varphi - \pi/4).$$

Для точки с координатами (ρ, φ) расстояние до начала координат равно ρ . Максимальное значение $\sin(\varphi - \pi/4)$ равно 1 при $\varphi = 3\pi/4$. Так как

$f(\rho) = 2\rho^3 - \frac{1}{\rho}$ при $\rho > 0$ – возрастающая функция, то максимальное значение ρ на кривой равно $f^{-1}(1) = 1$. Поэтому точка $\left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ наиболее удалена от начала координат. ►

Ответ. Точка $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Задача 6. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}$.

Решение 1. ◀

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} &= \int \frac{x^3 dx}{x^4\sqrt{x^4+1}} = \left\| \sqrt{x^4+1} = t > 1 \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2-1)} = \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} + c = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^4+1}+1} + c. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Решение 2.} \quad \blacktriangleleft \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} &= \left\| t = \frac{1}{x} \right\| = -\int \frac{t dt}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{\sqrt{1+(t^2)^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(t^2 + \sqrt{1+t^4}) + c = \frac{1}{2} \left(\ln x^2 - \ln(1 + \sqrt{1+x^4}) \right) + c. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$\text{Решение 3.} \quad \blacktriangleleft \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{x dx}{x^2\sqrt{x^4+1}} = \left\| x^2 = t > 0 \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \|t = \operatorname{tg} u, u \in (0, \pi/2)\| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + c = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + c. \blacktriangleright$$

Задача 7. Найти все решения $y(x), x \in (0, \pi)$, дифференциального уравнения $y'' + (2 \operatorname{ctg} x)y' - 2y = 0$, удовлетворяющие условию $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 1$.

◀ Перепишем уравнение в виде $(\sin x)y'' + (2 \cos x)y' - (2 \sin x)y = 0$ или

$$(y \sin x)'' - (y \sin x) = 0. \text{ Поэтому } y \sin x = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \text{ и } y = \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}{\sin x},$$

$x \in (0, \pi)$ – общее решение в полосе $\{(x, y) : 0 < x < \pi\}$. При $C_2 \neq -C_1$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}{\sin x} = \infty. \text{ При } -C_2 = C_1 = C/2$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{C(e^x - e^{-x})}{2 \sin x} = C.$$

Искомое решение $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2 \sin x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$, получается при $C = 1$. ▶

Ответ. $y = \operatorname{sh} x / \sin x$.

Задача 8. Убедиться, что для функции $f(r)$, заданной равенствами

$$f(r) = \frac{1}{r^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} \cos(x^2 + y^2)^2 dx dy \text{ при } r \neq 0 \text{ и } f(0) = \pi,$$

производная $f'(0)$ существует и найти ее.

◀ Очевидно, $f(r)$ – четная функция. При $r > 0$ получаем

$$f(r) = \frac{1}{r^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} \cos(x^2 + y^2)^2 dx dy = \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \cos \rho^4 \rho d\rho,$$

и, окончательно, $f(r) = \frac{\pi}{r^2} \int_0^{r^2} \cos t^2 dt$. Из-за четности эта же формула верна

и при $r < 0$. Теперь

$$f'(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r) - f(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi \int_0^{r^2} (\cos t^2 - 1) dt}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left(\pi \int_0^{r^2} (\cos t^2 - 1) dt \right)'_r}{(r^3)'_r} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r(\cos r^4 - 1)}{3r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi(\cos r^4 - 1)}{3r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi(-r^8/2)}{3r} = 0. \blacktriangleright$$

Ответ. $f'(0) = 0$.

Задача 9 (2-й курс. Все номинации). Пусть $ABCD$ – треугольная пирамида с вершиной D . Доказать методами аналитической геометрии, что существует *единственная* треугольная пирамида $ABCD'$ с тем же основанием ABC и такими же длинами боковых сторон ($AD' = AD$, $BD' = BD$, $CD' = CD$), отличная от $ABCD$.

◀ Введем систему координат, в которой A – начало координат, а точки B и C лежат в плоскости Oxy : $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$. Пусть $D(x, y, z)$, $AD = r_1$, $BD = r_2$, $CD = r_3$. Тогда координаты D удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \\ (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + z^2 = r_2^2, \\ (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 = r_3^2. \end{cases}$$

Вычитая из второго и третьего уравнения первое, получаем

$$\begin{cases} b_1x + b_2y = (r_1^2 - r_2^2 + b_1^2 + b_2^2)/2, \\ c_1x + c_2y = (r_1^2 - r_3^2 + c_1^2 + c_2^2)/2. \end{cases} \quad (S)$$

Так как векторы $\overrightarrow{AB} = (b_1, b_2, 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (c_1, c_2, 0)$ неколлинеарные, то система (S) имеет единственное решение: $x = x_0, y = y_0$. Подставляя эти значения в первое уравнение системы (1), получим $z^2 = r_1^2 - x_0^2 - y_0^2$. Так как пирамида $ABCD$ существует, то это уравнение имеет решение $z = z_0 \neq 0$. Тогда оно имеет ровно два решения $z = z_0$ и $z = -z_0$. Таким образом, кроме пирамиды $ABCD$ существует только одна пирамида с тем же основанием ABC и такими же длинами боковых сторон – пирамида $ABCD'$, симметричная $ABCD$ относительно плоскости ABC . ▶

Задача 9 (Старшие курсы. Все номинации). Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\ln(2n+1)}{\ln(2n)} \right)?$$

$$\blacktriangleleft \ln \left(\frac{\ln(2n+1)}{\ln(2n)} \right) = \ln \left(1 + \frac{\ln(2n+1) - \ln(2n)}{\ln(2n)} \right) =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/2n)}{\ln(2n)}\right) : \frac{\ln(1+1/2n)}{\ln(2n)} : \frac{1}{2n \ln(2n)}.$$

Были использованы асимптотическое равенство $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, $\alpha \rightarrow 0$, и пределы $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$ и $\frac{\ln(1+1/2n)}{\ln(2n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \ln(2n)}$ расходится по интегральному признаку. По предельному признаку сравнения расходится и заданный ряд. ►

Ответ. Ряд расходится.

Задача 10 (Техника и технологии. Все курсы). Бедный заяц бежит по координатной плоскости (волка) с вектором скорости $\vec{v} = (2, 3)$. Математически образованный волк естественно находится в начале координат, обнаруживает зайца в точке с координатами $(12, 15)$ и начинает бежать по прямой с постоянной по направлению и величине скоростью, равной 10, чтобы догнать зайца. По направлению какого вектора побежал волк, через какое время он догонит зайца?

Замечание. Единицы измерения расстояния, времени и скорости – волчьи и не стоит интерпретировать их по-человечески.

◀ Пусть $\vec{V} = (x, y)$ – вектор скорости волка, а t – время погони. Тогда $12 + 2t = xt$, $15 + 3t = yt$, откуда $x = \frac{12 + 2t}{t}$, $y = \frac{15 + 3t}{t}$. По условию

$$|\vec{V}|^2 = x^2 + y^2 = \frac{(12 + 2t)^2}{t^2} + \frac{(15 + 3t)^2}{t^2} = 10^2, \quad 87t^2 - 138t - 369 = 0.$$

Число $t = 3$ – очевидный делитель свободного члена. Легко проверяется, что оно – корень уравнения. Второй корень отрицательный, и нас не интересует. Теперь

$$x = \frac{12 + 2t}{t} = 6, \quad y = \frac{15 + 3t}{t} = 8.$$

Таким образом, вектор скорости волка $\vec{V} = (6, 8)$ ►

Ответ. Вектор скорости волка $\vec{V} = (6, 8)$, время погони 3.

Задача 10 (Математические специальности. Все курсы). Доказать, что существует функция $x(t)$, определенная и ограниченная на всей

числовой прямой \mathbb{R} , удовлетворяющая соотношениям $x'(t) = 1 - x^{10}(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и $x(0) = 0$.

Решение 1 (непосредственное). ◀ Так как функция $\frac{1}{1-x^{10}}$ определена и непрерывна на $(-1, 1)$, то ее первообразная $t(x) = \int_0^x \frac{ds}{1-s^{10}}$ определена и дифференцируема на $(-1, 1)$, удовлетворяет условию $t(0) = 0$ и ее производная $t'(x) = \frac{1}{1-x^{10}}$. Так как $\forall x \in (-1, 1) \quad t'(x) > 0$, то $t(x)$ – возрастающая функция.

При $0 \leq s \leq x < 1$ имеем

$$\frac{1}{1-s^{10}} = \frac{1}{(1-s^2)(1+s^2+s^4+s^6+s^8)} \geq \frac{1}{5(1-s^2)}$$

и

$$t(x) = \int_0^x \frac{ds}{1-s^{10}} \geq \frac{1}{5} \int_0^x \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{10} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Но $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{10} \ln \frac{1+x}{1-x} = +\infty$, а потому и $\lim_{x \rightarrow -1-0} t(x) = +\infty$. Очевидно, что $t(x)$ нечетная функция. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow -1+0} t(x) = -\infty$. Таким образом, $t(x)$ определена и возрастает на $(-1, 1)$, а ее область значений $(-\infty, \infty)$. Следовательно, она имеет обратную функцию $x(t)$, определенную $(-\infty, \infty)$, $x(0) = 0$ с областью значений $(-1, 1)$ и потому ограниченную, а ее производная $x'(t) = \frac{1}{t'(x)} \Big|_{x=x(t)} = 1 - x^{10}(t)$, $x(0) = 0$. ▶

Решение 2. ◀ По теореме существования и единственности решения ДУ и по теореме о продолжении решения существует максимальный по включению интервал $(\alpha, \beta) \ni 0$, на котором определено и ровно одно решение ДУ $x = x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$; при этом для β либо 1) $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t) = \pm\infty$, либо 2) $\beta = +\infty$, а для α либо 1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow \alpha+0} x(t) = \pm\infty$, либо 2) $\alpha = -\infty$. В случаях 1) $\exists t_0 \in (\alpha, \beta)$ $x(t_0) = 1$ или $x(t_0) = -1$. Тогда существуют два решения $x \equiv 1$ и $x = x(t)$ ($x \equiv -1$ и $x = x(t)$), удовлетворяющие одному начальному условию $x|_{t=t_0} = 1$ ($x|_{t=t_0} = -1$), что невозможно. Поэтому возможны только случаи

2), то есть решение $x(t)$ определено на $(-\infty, \infty)$. Тот факт, что для любого t $-1 < x(t) < 1$, мы фактически уже доказали. ►

Задача 10 (Экономические специальности. Все курсы). Расходы P по перевозке грузов теплоходом по морю на расстояние S (себестоимость перевозки) складываются из двух частей. Первая часть P_1 пропорциональна времени t нахождения в пути: $P_1 = at$, а вторая P_2 пропорциональна расходу топлива Q : $P_2 = bQ$. Теплоход движется с постоянной скоростью $v \leq v_{\max}$. Расход топлива Q пропорционален скорости и пройденному пути: $Q = cvS$. Доказать, что существует единственное значение скорости $v = v_0$, при которой себестоимость перевозки будет наименьшей. Найти зависимость v_0 от коэффициентов пропорциональности a, b и c .

◀ Требуется минимизировать функцию $P = P(v) = a \frac{S}{v} + bcvS$ на промежутке $(0, v_{\max}]$. Так как $P'(v) = \left(-\frac{a}{v^2} + bc\right)S = \frac{bcv^2 - a}{v^2}S$, то $P(v)$ убывает на $(0, v_*)$ и возрастает на $[v_*, \infty)$, где $v_* = \sqrt{\frac{a}{bc}}$. Поэтому наименьшее значение $P(v)$ на $(0, v_{\max}]$ достигается в точке $v_0 = v_* = \sqrt{\frac{a}{bc}}$, если $v_* < v_{\max}$, и в точке $v_0 = v_{\max}$, если $v_* \geq v_{\max}$. ►

Ответ. $v_0 = \sqrt{a/bc}$, если $\sqrt{a/bc} < v_{\max}$, и $v_0 = v_{\max}$, если $\sqrt{a/bc} \geq v_{\max}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оленикова Ю.К. Анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 86–92.
2. Оленикова Ю.К. Задания Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 93–101.
3. Ройтенберг В.Ш. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учебное пособие. / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. 2-е изд., испр. и доп. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. 151 с.
4. Березина Л.В. Анализ результатов решения задач Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ им. П.А. Соловьева / Л.В. Бе-

- резина, А.В. Васильева, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 52–57.
5. *Васильева А.В.* Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / А.В. Васильева, Л.В. Березина, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 58–67.
 6. *Ройтенберг В.Ш.* О задачах всероссийской студенческой олимпиады 2016 года в Ярославле / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Актуальные вопросы преподавания математики в образовательной организации высшего образования: Материалы всерос. очно-заочной науч.-метод. конф. с междунар. участием. Кострома: Изд-во ВА ВРХБЗ и ИВ, 2017. С. 24–31.
 7. *Ройтенберг В.Ш.* Всероссийская и VIII международная студенческие олимпиады по математике в Ярославле / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 6. СПб.: Изд-во ГУ МРФ, 2018. С. 104–111.

УДК 517

В. Ш. Ройтенберг¹, Л. А. Сидорова²

¹Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: vroitenberg@mail.ru*

²Ярославский государственный медицинский университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: sl_oleg_70@mail.ru*

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ И СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Анализируется роль дифференциальных и интегральных теорем о среднем в курсе математического анализа в вузах. Даны варианты определения среднего значения функции, используемые в приложениях. Приводятся примеры применения теорем о среднем при решении задач студенческих математических олимпиад.

Ключевые слова: теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши, интегральная теорема о среднем, среднее значение функции

V. Sh. Roitenberg¹, L. A. Sidorova²

¹Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: vroitenberg@mail.ru*

²Yaroslavl State Medical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: sl_oleg_70@mail.ru*

MEAN VALUE THEOREMS AND THE MEAN VALUE OF A FUNCTION IN THE COURSE OF MATHEMATICS

The role of differential and integral mean value theorems in mathematical analysis courses at universities is analyzed. Variants of determining the mean value of a function used in applications are considered. We give examples of the use of these theorems in solving problems in student mathematics Olympiads.

Keywords: Roll's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's theorem, integral mean value theorem, mean value of a function

В работе сделано несколько замечаний об изложении в курсе математике теорем о среднем и их применении, а также об определении понятия среднего значения функции. Кроме того, приведены примеры задач студенческих математических олимпиад, которые можно использовать на занятиях студенческого математического кружка, посвященных указанным темам.

1. Дифференциальные теоремы о среднем

Поскольку статья предназначена для преподавателей математики, то не будем напоминать стандартные формулировки теорем Ролля, Лагранжа и Коши [1]. Заметим, что обобщающее название «Теоремы о среднем» они получили потому, что в них утверждается существование некоторой «средней» точки между концами рассматриваемого отрезка. По этому признаку следовало бы отнести к теоремам о среднем и формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши играют в основном вспомогательную роль и используются для доказательства более существенных для математического анализа результатов. На рис. 1 отображена одна из возможных схем вывода основных следствий этих теорем.



Рис. 1. Следствия дифференциальных теорем о среднем

Конечно, на лекциях в техническом вузе желательно приводить всю последовательность теорем, отраженных в схеме на рис. 1, с их доказательством. Однако при существующем ныне дефиците часов на лекции возникает вопрос, чем можно пожертвовать с наименьшими потерями.

Теоремы Ролля и Лагранжа имеют наглядную геометрическую иллюстрацию. Поэтому их доказательства можно опустить без существенного урона для понимания. Теорему Коши, необходимую для доказательства правила Лопиталья и «естественного» вывода формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, можно свести к теореме Лагранжа, используя замену переменной. Конечно, можно обойтись и без теоремы Коши. Правило Лопиталья можно пояснить в простейшем случае, когда числитель и знаменатель – функции, непрерывно дифференцируемые в предельной точке, линеаризовав их в этой точке. Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно вывести, используя только теорему Ролля [1].

В крайнем случае, можно проигнорировать все дифференциальные теоремы о среднем, оставив только правило Лопиталья, а формулу Тейлора вывести только остаточным членом в форме Пеано.

2. Интегральная теорема о среднем

Теорема. Если функция $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

В частном случае $g(x) \equiv 1$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (2)$$

В доказательстве этой теоремы обычно используют двустороннюю оценку интеграла и теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Однако полезно отметить, что формулу (2) можно вывести и из дифференциальной теоремы о среднем – теоремы Лагранжа, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left\| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ \exists \xi \in (a, b) \end{array} \right\| = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a).$$

Конечно, чтобы не было «порочного круга» в доказательствах, надо иметь в виду, что формулу Ньютона-Лейбница можно вывести без использования интегральной теоремы о среднем.

3. Среднее значения функции

Понятие среднего значения функции играет важную роль в приложениях. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то число

$$\bar{f} \stackrel{def}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad (3)$$

называется *средним значением функции f на отрезке $[a, b]$* .

Если функция непрерывна на $[a, b]$, то по теореме о среднем \bar{f} действительно является значением функции в некоторой «средней» точке ξ отрезка.

Среднее значение функции можно рассматривать как предел среднего арифметического значений функции $f(x_i)$ в точках $x_i = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$ «равномерно распределенных» на отрезке:

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \quad (4)$$

Действительно, обозначив $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ и записав интеграл как предел интегральных сумм, получим равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = (b-a)\bar{f},$$

а потому и равенство (3).

Заметим также, что средняя скорость v_{cp} движения в смысле «школьного» определения и \bar{v} в смысле приведенного выше определения совпадают. Если $v(t)$ – мгновенная скорость в момент $t \in [0, T]$, то путь,

пройденный за время T : $S = \int_0^T v(t)dt$, а

$$v_{cp} = \frac{S}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)dt = \bar{v}.$$

Средним значением T -периодической функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называют ее среднее значение на любом отрезке $[a, a+T]$ длины периода T :

$$\bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx . \quad (5)$$

Средним значением функции $f(x)$, $x \in [a, \infty)$, называется предел ее среднего значения на отрезке $[a, b]$ при $b \rightarrow +\infty$:

$$\bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx , \quad (6)$$

если этот предел существует.

4. Задачи математических олимпиад

Приведем ряд задач, дававшихся на математических олимпиадах, проводимых ЯГТУ, использующих теоремы о среднем и понятие среднего значения функции.

Задача 1. [2, с. 111] Пусть $f(x)$, $x \in [-1; 1]$ – дважды дифференцируемая функция, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Доказать, что существует число $\xi \in (-1, 1)$ такое, что числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $f''(\xi)$ образуют арифметическую прогрессию.

◀ Обозначим $g(x) = e^{-x} f(x)$. Тогда

$$g'(x) = e^{-x} (-f(x) + f'(x)), \quad g''(x) = e^{-x} (f(x) - 2f'(x) + f''(x)) .$$

Поскольку $g(-1) = g(0) = g(1)$, то по теореме Ролля найдутся числа $\xi_1 \in (-1, 0)$ и $\xi_2 \in (0, 1)$ такие, что $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$. Теперь применив теорему Ролля для функции $g'(x)$ на отрезке $[\xi_1; \xi_2]$, получим, что существует точка $\xi \in (-1, 1)$ в которой $g''(\xi) = 0$. Но тогда $f(\xi) - 2f'(\xi) + f''(\xi) = 0$, $f(\xi) + f''(\xi) = 2f'(\xi)$. Следовательно, числа $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $f''(\xi)$ образуют арифметическую прогрессию. ▶

Задача 2. Пусть $f(x)$, $x \in [0; 2]$ – дифференцируемая функция, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$. Доказать, что существует число $\xi \in (0, 2)$ такое, что $f'(\xi) = \frac{1}{f(\xi)}$. *Указание.* Применить теорему Ролля к функции $g(x) = f^2(x) - 2x$.

Задача 3 [2, с. 96]. Пусть $f(x)$ – заданная дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что уравнение

$(x-x^2)f'(x) = (2x-1)f(x)$ имеет хотя бы один корень. Указание. Применить теорему Ролля.

Задача 4. [2, с. 125]. Пусть $f(x)$ – любая непрерывная функция на \mathbb{R} . Доказать, что уравнение $f(x) - 2xf(x^2) = 0$ имеет хотя бы один корень.

Указание. Проверить, что функция $F(x) = \int_0^x (f(s) - 2sf(s^2)) ds$ удовлетворяет на отрезке $[0,1]$ условиям теоремы Ролля и применить ее.

Задача 5 [2, с. 77]. Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$ ограничена на множестве $G = \{(x, y) : 0 < x < y < \pi/2\}$.

◀ По теореме Коши $\exists \xi \in (x, y)$

$$f(x, y) = \frac{(\sin t)'}{(\operatorname{tg} t)'} \Big|_{t=\xi} = \frac{\cos \xi}{\frac{1}{\cos^2 \xi}} = \cos^3 \xi.$$

Следовательно, $\forall (x, y) \in G \quad |f(x, y)| \leq 1$. ▶

Задача 6. Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$ ограничена.

Указание. Использовать теорему Лагранжа.

Задача 7 [3, с.106]. Пусть f – функция, непрерывно дифференцируемая на множестве \mathbb{R} действительных чисел. Доказать, что функция

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \overset{\text{def}}{\int_{x-t}^{x+t} \frac{f(z+t) - f(z-t)}{t^2} dz}$$

определена и непрерывна на \mathbb{R} .

◀ Фиксируем число x . Подынтегральная функция непрерывна. По интегральной теореме о среднем для любого $t > 0$ найдется число $\bar{z} = \bar{z}(t)$ между $x-t$ и $x+t$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} \frac{f(z+t) - f(z-t)}{t^2} dz &= \frac{f(\bar{z}+t) - f(\bar{z}-t)}{t^2} ((z+t) - (z-t)) = \\ &= 2 \frac{f(\bar{z}+t) - f(\bar{z}-t)}{t}. \end{aligned}$$

Применяя теперь теорему Лагранжа, получаем, что для любого $t > 0$ найдется число $\xi = \xi(t)$ между $\bar{z}(t) - t$ и $\bar{z}(t) + t$ такое, что

$$\int_{x-t}^{x+t} \frac{f(z+t) - f(z-t)}{t^2} dz = 2 \frac{f'(\xi)((\bar{z}+t) - (\bar{z}-t))}{t} = 4f'(\xi). \quad (7)$$

Так как $x - 2t < \xi = \xi(t) < x + 2t$, то $\lim_{t \rightarrow +0} \xi(t) = x$. Переходя в равенстве (7) к пределу при $t \rightarrow +0$, по непрерывности f' имеем

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 4 \lim_{t \rightarrow +0} f'(\xi(t)) = 4f'(\lim_{t \rightarrow +0} \xi(t)) = 4f'(x).$$

Поскольку f' непрерывная функция, то и g непрерывная функция. ►

Задача 8. [4, с. 97]. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt$.

◀ По теореме о среднем

$$f(x) = \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt = \left(\frac{1}{x} - x \right) \cos \pi \xi^2(x) = \frac{1-x^2}{x} \cos \pi \xi^2(x),$$

где $\xi(x)$ расположено между x и $1/x$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow 1} \xi(x) = 1$ и

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{x} \cos(\pi \xi^2(x)) = -2 \cos \pi = 2. \quad \blacktriangleright$$

Задача 9 [5, с. 108]. Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$ – непрерывная положительная возрастающая функция. Доказать, что для любого $c \in (a, b)$

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f(x) dx < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

то есть среднее значение $f(x)$ на отрезке $[a, c]$ меньше среднего значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

◀ Функции $\bar{f}(t) = \frac{1}{t-a} \int_a^t f(x) dx$ – среднее значение $f(x)$ на отрезке

$[a, t]$ определена и дифференцируема на $(a, b]$, ее производная

$$\bar{f}'(t) = \frac{1}{t-a} f(t) - \frac{1}{(t-a)^2} \int_a^t f(x) dx = \frac{1}{(t-a)^2} \left(f(t)(t-a) - \int_a^t f(x) dx \right).$$

Так как $f(x)$ возрастает, то при $t \in (a, b]$

$$\int_a^t f(x)dx < \int_a^t f(t)dx = f(t)(t-a),$$

и потому $\forall t \in (a, b) \bar{f}'(t) > 0$. Следовательно, функция $\bar{f}(t)$ возрастает на $(a, b]$, и при $a < c < b$ имеем

$$\bar{f}(c) = \frac{1}{c-a} \int_a^c f(x)dx < \bar{f}(b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \blacktriangleright$$

Задача 10 [2, с. 97]. Найти среднее значение функции $f(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$ на отрезке $[0, 1]$.

Задача 11 [2, с. 44]. Доказать, что если для непрерывной на всей числовой прямой функции ее среднее значение на любом отрезке длины T постоянно, то она является периодической функцией.

Задача 12. Найти среднее значение функции $f(x) = e^{-\frac{x}{x^2+1}}$ на промежутке $[0, \infty)$.

Указание. Использовать определение – формулу (6) и правило Лопиталя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Ройтенберг В.Ш. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. 150 с.
3. Оленикова Ю.К. О ярославских студенческих математических олимпиадах 2018 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. С. 99–109.
4. Оленикова Ю.К. Задания Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 93–101.
5. Ройтенберг В.Ш. Всероссийская и VIII международная студенческие олимпиады по математике в Ярославле / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Математика и ее приложения. Вып. 6. Межвуз. сб. науч. тр. СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова, 2018. С. 104–111.

УДК 51-74

В. Р. Сапогов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vladiksapogov823@gmail.com

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В МЕТРОЛОГИИ

Рассматривается необходимость вычисления частных производных в процессе оценки неопределенности измерения. Приведен пример расчета коэффициентов чувствительности при определении октанового числа.

Ключевые слова: частные производные, измерение, неопределенность, коэффициент чувствительности

V. R. Sapogov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vladiksapogov823@gmail.com

PARTIAL DERIVATIVES IN METROLOGY

The necessity of calculating partial derivatives in the process of estimating measurement uncertainty is considered. An example of calculating the sensitivity coefficients for determining the octane number is given.

Keywords: partial derivatives, measurement, uncertainty, sensitivity coefficient

Метрология – это методология определения качества проведенного измерения. Необходимость в определении действительного значения любой измеримой величины всегда будет актуальна для человечества. Каждый процесс и явление научное сообщество старается описываться количественной, а не качественной информацией, вводя шкалы и новые методы измерения величин.

Результат измерения всегда связан с точностью, а правильное сказать – с неточностью. Любое выходное значение сопровождается неопределенностью – параметром, характеризующим разброс значений, которые могут быть обоснованно приписаны данной величине. Вопрос о расчете погрешности измерения связан с необходимостью наличия математического аппарата, который бы систематизировал подход к определению неопределенности.

При измерении величины Y составляется функция зависимости $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этой величины от некоторых параметров x_1, x_2, \dots, x_n . Воз-

действие каждого параметра на значение величины Y можно определить путем вычисления частных производных $c_i = \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – коэффициентов чувствительности. Полученные коэффициенты чувствительности используются при расчете суммарной дисперсии:

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^n c_i^2 u^2(x_i).$$

Из этой формулы видно, что знак коэффициента чувствительности неважен. Каждый коэффициент определяет вклад дисперсии соответствующего ему влияющего фактора в суммарную дисперсию. Чем больше коэффициент чувствительности c_i , тем больше рассеяние выходной величины Y зависит от рассеяния входной величины x_i .

Приведем реальный пример нахождения коэффициентов чувствительности. При определении октанового числа (ОЧ) бензинового топлива в соответствии с требованиями ГОСТ 511-2022 [1] значение октанового числа A испытуемого топлива вычисляют по формуле

$$A = A_1 + (A_1 + A_2) \frac{a_1 - a}{a_1 - a_2},$$

где A_1 – объемная доля изооктана в смеси эталонных топлив, детонирующей сильнее испытуемого образца топлива, %;

A_2 – объемная доля изооктана в смеси эталонных топлив, детонирующей слабее испытуемого топлива, %;

a_1 – среднеарифметическое значение результатов отсчетов по указателю детонации для смесей эталонных топлив A_1 ;

a_2 – среднеарифметическое значение результатов из отсчетов по указателю детонации для смесей эталонных топлив A_2 ;

a – среднеарифметическое значение отсчетов по указателю детонации для испытуемого топлива.

Рассматривая A как функцию параметров a , a_1 и a_2 , вычислим коэффициенты чувствительности:

$$c = \frac{\partial A}{\partial a} = - \frac{A_1 + A_2}{a_1 - a_2};$$

$$c_1 = \frac{\partial A}{\partial a_1} = \frac{(A_1 + A_2)(a - a_2)}{(a_1 - a_2)^2};$$

$$c_2 = \frac{\partial A}{\partial a_2} = \frac{(A_1 + A_2)(a_1 - a)}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Приведем пример расчета коэффициентов чувствительности, используя табл. 1 с реальными данными.

В рассматриваемом случае

$$c = \frac{\partial A}{\partial a} = -\frac{94 + 96}{74,2 - 46,2} \approx -6,79,$$

$$c_1 = \frac{\partial A}{\partial a_1} = \frac{(94 + 96)(50,2 - 46,2)}{(74,2 - 46,2)^2} \approx 0,97,$$

$$c_2 = \frac{\partial A}{\partial a_2} = \frac{(94 + 96)(74,2 - 50,2)}{(74,2 - 46,2)^2} \approx 5,81.$$

Таблица 1. Значения переменных, полученные опытным путем

Входная величина	Единица измерения	Значение оценки
A_1	ед. ОЧ	94,0
A_2	ед. ОЧ	96,0
a_1	ед. ОЧ	74,2
a_2	ед. ОЧ	46,2
a	ед. ОЧ	50,2
A	ед. ОЧ	95,7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 511-2022. Топливо для двигателей. Моторный метод определения октанового числа.

УДК 51:378

Ю. И. Хритина, С. А. Бельман

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина,
Россия, г. Рязань, e-mail: xrjulechka99@mail.ru, s.belman@365.rsu.edu.ru

ОСОБЕННОСТИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ И УЧЕБНОЙ МОТИВАЦИИ

Статья посвящена исследованию специфики мотивов учебной деятельности. Изучены мотивы учебной деятельности студентов педагогического вуза и школьников 5-го класса.

Ключевые слова: *мотивы учебной деятельности, студент педагогического вуза, школьник, классификация мотивов*

Y. I. Khritina, S. A. Belman

S.A. Yesenin Ryazan State University,
Russia, Ryazan, e-mail: xrjulechka99@mail.ru, s.belman@365.rsu.edu.ru

FEATURES OF COGNITIVE AND LEARNING MOTIVATION

The article is devoted to the study of the specifics of motives for educational activities. The motives for the educational activities of pedagogical university students and 5th grade schoolchildren were studied.

Keywords: *motives of educational activity, student of a pedagogical university, schoolboy, classification of motives*

Успешность в учебной и профессиональной деятельности, удовлетворенность собственным становлением, положительное отношение к освоению нового во многом зависит от уровня мотивации к обучению.

На всех уровнях современного образования отмечается наличие проблемы, связанной с отсутствием мотивации у большинства обучающихся к учебной деятельности. Присутствует изменение системы ценностей в области образования, в которой значимой целью становится не процесс познания и овладения профессией, а получение аттестата или диплома, что приводит к снижению качества образования.

Мотивация учения состоит из системы потребностей, целей и мотивов, с помощью которых человек хочет овладевать знаниями, умениями, навыками и способами познания, осознанно и ответственно относиться к учению, быть активным в учебной деятельности. Мотив учения – это на-

правленность ученика на разные стороны учебной деятельности, побуждение к самостоятельному овладению знаниями, умениями, навыками.

В современной психологии есть несколько подходов к классификации мотивов учения. М.В. Матюхина выделяет два класса мотивов – внутренние (познавательные) и внешние (социальные) [1]. Внутренние или познавательные мотивы отличаются интересом к самому процессу и его результату, а также стремлением совершенствовать свои умения и качества, например, найти наиболее рациональный способ решения задачи. Эти мотивы – основа самовоспитания и самосовершенствования. Внешние или социальные мотивы не актуализируются без контроля и напоминания взрослых, а характеризуются, например, когда ученик действует в силу долга, обязанности или из-за давления родителей, учителей. Данные мотивы являются основой самообразования.

Доктор психологических наук Е.П. Ильин, в своих трудах делит учебные мотивы на две группы. К первой группе относятся: познавательные, учебно-познавательные и самообразовательные мотивы. Вторая группа состоит из социальных мотивов, связанных с разными социальными взаимодействиями обучающегося с другими людьми. Например, в младших классах у школьников мотивом является заинтересованность к учебе, отметки, которые он получает, стремление к взрослости, познавательный мотив, а в средних классах мотив посещения уроков – «потому что надо» и превосходит стремление найти свое место среди товарищей. В старших классах основной мотив – это подготовка к поступлению. Мотивом у студентов, чаще всего, является возможность получить диплом и стать высококвалифицированным специалистом.

«Вообще же общепризнанно, что единой и удовлетворяющей всех классификации мотивов нет. Классификации мотивов могут быть разными в зависимости от целей исследователя» [2, с. 434].

Основные мотивы поступления в вуз, по мнению Е.П. Ильина, это в основном желание общаться с однокурсниками и другими студентами, большое общественное значение профессии и широкая область ее применения, соответствие профессии интересам и склонностям, а также творческие возможности [2, с. 512].

Интересно, что, согласно психологическим исследованиям, для успешной учебы фактор мотивации оказался намного сильнее, чем фактор интеллекта. Успехи в учебе не обнаружили тесной связи с интеллектом учащихся, в то время как по уровню мотивации учебной деятельности «сильные» и «слабые» обучающиеся различались. Первые имели потребность в освоении предмета на высоком уровне и были настроены на получение прочных углубленных знаний и практических навыков. Мотивация вторых была обусловлена внешними факторами, они стремились избежать осуждения со стороны значимых людей, наказания за плохую учебу.

Мотивация обучающихся в настоящее время является очень актуальной проблемой, и было решено выявить мотивы учебной деятельности студентов, обучающихся на педагогических специальностях, и школьников, обучающихся в 5-м классе. Рассмотрев имеющиеся методики диагностики мотивов учебной деятельности, остановились на методике А.А. Реана, В.А. Якунина, т.к. она предназначена именно для студентов [3]. Эта методика состоит из 16 мотивов учебной деятельности. Студенты должны были выбрать пять, наиболее значимые для них.

Мотивы были следующими:

1. Стать высококвалифицированным специалистом.
2. Хочу получить диплом.
3. Успешно продолжить обучение на последующих курсах.
4. Успешно учиться, сдавать экзамены на «хорошо» и «отлично».
5. Попав в институт, вынужден учиться, чтобы окончить его.
6. Приобрести глубокие и прочные знания.
7. Быть постоянно готовым к очередным занятиям.
8. Не запускать изучение предметов учебного цикла.
9. Не отставать от сокурсников.
10. Обеспечить успешность будущей профессиональной деятельности.
11. Заводить знакомства и общаться с интересными людьми.
12. Достичь уважения преподавателя.
13. Быть примером для сокурсников.
14. Добиться одобрения родителей и окружающих.
15. Избежать осуждения и наказания за плохую учебу.
16. Получить интеллектуальное развитие.

После статистической обработки были получены данные, представленные на рис. 1.

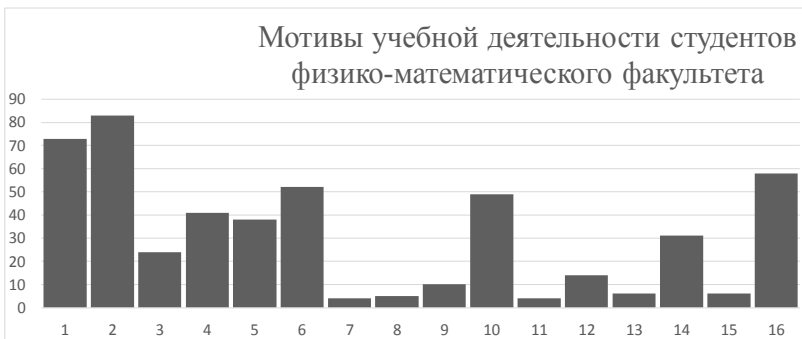


Рис. 1. Мотивы учебной деятельности студентов физико-математического факультета

Анализируя данные, полученные в ходе опроса, можно сказать, что основные мотивы студентов – это профессиональные мотивы и учебно-познавательные.

Как же это может отразиться на учебной деятельности? Есть несколько вариантов:

1. Доминирование профессиональных мотивов приводит к снижению результатов в познании, так как профессиональная мотивация является внешней по отношению к процессу познания [4].

2. Желательно, чтобы профессиональные мотивы были ведущими мотивами у студентов, так как профессиональные мотивы по сравнению с познавательными более интенсивно влияют на эффективность учебной деятельности студентов [5].

3. Познавательные и профессиональные мотивы тесно связаны между собой и повышают ее продуктивность [6].

Аналогичное исследование мотивации к обучению пятиклассников проводилось с применением анкеты «Оценка уровня школьной мотивации» Н.Г. Лускановой [7], которая состоит из десяти вопросов и, по мнению психологов, лучше других похожих анкет отражает отношение детей к школе и учебному процессу, а также эмоциональное реагирование на школьную ситуацию. Н.Г. Лусканова выделяет тот факт, что наличие у ребёнка такого мотива, как, например, качественно выполнять все предъявляемые школой требования и продемонстрировать себя с лучшей стороны, заставляет ученика проявлять активность в отборе и запоминании необходимой информации. При низком уровне учебной мотивации можно заметить снижение школьной успеваемости.

Стимульный материал методики состоял из таких вопросов, как «Нравится ли тебе в школе?», «С радостью ли идешь в школу?», «Много ли друзей в школе?» и т.п.

Опрос был предложен учащимся 5А класса МБОУ «Школа № 20» г. Рязани, удачно прошли его 20 учеников. Обработав результаты анкеты с помощью ключа, в котором выставлялась оценка за ответ от 0 до 3 баллов, и подсчитав набранное количество баллов, можно было сказать, к какому из пяти уровней мотивации относится ученик.

Различия между группами детей были оценены по критерию Стьюдента, и было установлено пять основных уровней школьной мотивации. Первый высокий уровень учебной активности (25-30 баллов), такие дети отличаются наличием высоких познавательных мотивов, добросовестны и ответственны. Второй уровень хорошей школьной мотивации (20-24 балла), является средней нормой и описывает учащихся, успешно справляющихся с учебной деятельностью. Следующий средний уровень (15-19 баллов) говорит о положительном отношении к школе, но школа привлекает

больше внеучебными сторонами, познавательные мотивы сформированы в меньшей степени и учебный процесс мало привлекает. Далее уровень низкой школьной мотивации (10-14 баллов), когда учащиеся пропускают занятия, испытывают затруднения в учебной деятельности. И в завершении, самый низкий уровень – негативное отношение к школе, школьная дезадаптация, когда дети испытывают серьезные трудности в школе.

Для возможности наглядного анализа полученных результатов исследования мотивации школьников удобно представить в виде круговой диаграммы (рис. 2).



Рис. 2. Мотивы учебной деятельности школьников

Обобщая полученные данные, можно сказать, что в основном у школьников положительное отношение к школе. Но доли негативного и низкого уровней мотивации в сумме составляют более трети опрошенных обучающихся.

Для повышения мотивации обучения в книге Денисовой М.И. [8] приведены следующие формы подачи материала на математических занятиях, например, с помощью проблемных заданий:

1. Математическая задача

К ним можно отнести задачи из жизненных ситуаций и, так называемой, функциональной грамотности, а также исторические задачи, то есть заимствованные из истории математики. Подобные задачи можно найти в книге В.Д. Чистякова [9].

Приведем для примера задачу из «Всеобщей арифметики» Ньютона: 12 быков съедают 3 целых и $\frac{1}{3}$ югера пастбища за 4 недели; 21 бык съедает 10 югеров такого же пастбища за 9 недель. Сколько быков съедят 24 югера пастбища за 18 недель?

Интересна также китайская задача из трактата «Девять отделов искусства счета» со следующим условием: «5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоит отдельно вол и баран?»

Для обучающихся очень увлекательно решать задачи не только в привычных денежных единицах, но также и в старинных, и зарубежных.

2. *Организованный учителем опыт, таящий в себе продуманное внутреннее противоречие, не позволяющее выполнить требования учителя*

Прежде, чем вводить теорему о сумме углов треугольника, можно предложить ученикам построить треугольник с углами 40° , 70° , 80° , размер сторон может быть любой. Построив два из предложенных угла, ребенок уже получит треугольник, только третий угол не получится построить по заданному условию. Учитель может предложить начать построение треугольника с других углов, но у обучающегося снова получится треугольник на 10° меньше, чем указано в условии. Здесь-то и возникнет мысль о том, что об углах треугольника есть свойство, и в большинстве случаев, ученики сами формулируют его, что сумма углов равна 180° [2].

Так же можно предложить ученикам измерить длины сторон прямоугольного треугольника и узнать, как связана длина гипотенузы и катетов. Показать несколько прямоугольных треугольников с известными катетами. Например, как на рис. 3.

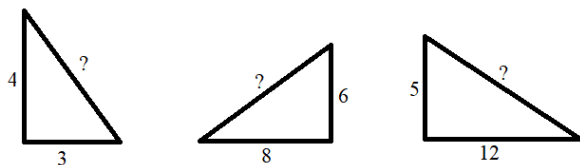


Рис. 3

После того, как построены катеты, найти гипотенузы и заметить закономерность.

3. *Вопрос учителя*

Данная форма постановки проблемных задач покажет себя с наилучшей стороны, если задание будет основано на связи с аналогичным известным материалом. Например, этот подход можно использовать при введении теоремы о средней линии трапеции: знаем, как найти среднюю линию треугольника, но как найти среднюю линию трапеции? (например, зная её основания). Так как ученики уже знают теорему о средней линии треугольника, то используя уже отработанные знания, можно провести доказательство теоремы о средней линии трапеции, построив трапецию до треугольника с помощью продолжения боковых сторон до пересечения.

При изучении темы «Расположение прямых в пространстве» рационально провести повторение о том, как расположены прямые на плоскости (пересекаются и параллельны). Будут ли параллельными или пересекающимися прямые, изображающие железнодорожный путь и мост над ним? (Железнодорожный путь и мост над ним – не параллельны и не пересекаются, значит, в пространстве существует еще один вид расположения прямых – скрещивающиеся прямые).

4. Рассказ учителя, легенда, сказка, историческая справка и т.п., заканчивающиеся вопросом учителя ко всем ученикам

Так, на уроке «Степень с натуральным показателем» (7 класс) учитель может рассказать обучающимся легенду о шахматах [10]. Где мудрец Сете изобрел шахматы, показал изобретение царю и попросил за него заплатить по следующему принципу: за первую клетку шахматной доски заплатить одно зернышко риса, за вторую – два, за третью – четыре и т.д. В завершении этого рассказа нужно поставить вопрос: «Сколько зерен пшеницы должен заплатить царь Шерам изобретателю шахмат Сете за одну лишь 64-ю клеточку шахматной доски?» Данное число можно записать, как $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$. Можно ли записать его короче? Ответ на этот вопрос да-

63 множителя

ет вводимое на данном уроке понятие «степень». Эту легенду можно использовать и на уроке, посвященном сумме геометрической прогрессии, в девятом классе. Там следует поставить вопрос: «Сколько зерен пшеницы должен заплатить Шерам Сете за все 64 клеточки шахматной доски?». Для сочинения таких рассказов учитель может использовать литературу по истории математики (книги Г.И. Глейзера, В.Д. Чистякова, Я.И. Перельмана), реконструированные сюжеты и героев любимых мультфильмов, а также собственную фантазию.

На уроке о сумме арифметической прогрессии можно использовать легенду о Гауссе, которому в детском возрасте была предложена задача посчитать сумму натуральных чисел от 1 до 100. В конечном итоге образуются 50 пар чисел, равных сумме крайних слагаемых, таким образом, получаем $50 \cdot 101 = 5050$.

Увлекательно использовать на уроках сюжеты известных советских мультфильмов. Например, «В стране невыученных уроков» Виктор Перестукин получает в ответе удивительное количество рабочих – полтора землекопа. Данный результат сложно представить в реальной жизни и заставляет задуматься ученика о действительности результата.

Такая подача математического материала поможет повысить уровень мотивации учащихся, а следовательно, и качество знаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матюхина М.В.* Мотивы учения учащихся с разным уровнем успеваемости // Мотивация учения. Волгоград: Перемена, 1976. С. 5-15.
2. *Ильин Е.П.* Мотивация и мотивы. СПб.: Питер, 2002. 512 с.
3. *Якунин В.А.* Психология учебной деятельности студентов. М.; СПб., 1994. 157 с.
4. *Мешков Н.И.* Становление учебно-профессиональной мотивации студентов в процессе подготовки педагогических кадров в университете: дис. ... д-ра психол. наук. Саранск, 1993.
5. *Фастовец М.В.* Формирование профессионально-педагогической направленности личности учителя: дис. канд. психол. наук. М., 1991.
6. *Бугременко А.Г.* Внутренняя и внешняя учебная мотивация у студентов педагогического вуза // Психологическая наука и образование. 2006. № 4. С. 51-59.
7. *Лусканова Н.Г.* Пути психологической коррекции аномалий развития личности // Здоровье, развитие, личность. М.: Медицина, 1990. 23 с.
8. *Денисова М.И.* Теория и методика обучения математике в средней школе (общая методика): учебное пособие. М.: РИОР, 2023. 166 с.
9. *Чистяков В.Д.* Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. Минск: Изд-во Мин. высшего, сред. спец. и проф. обр. БССР, 1962. 204 с.
10. *Перельман Я.И.* Легенда о шахматной доске // Живая математика. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1967. С. 87-91.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 669.131.622

В. А. Алов, Ю. М. Горовой, А. Н. Попков

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: popkowan@list.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАНИЯ ЧУГУНА В КОВШЕ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКИМИ ТАБЛЕТКАМИ

Приведен расчёт линейных размеров цилиндрических добавок (таблеток) для наномодифицирования чугуна с использованием алюминотермии и самораспространяющегося высокотемпературного синтеза при ковшовой обработке без механического перемешивания с учётом гидродинамических условий и критериев тепло- и массообмена, что способствует равномерному распределению алюминия по всему объёму расплава.

Ключевые слова: *чугун, наномодифицирование, литейный ковш, усвоение, теплообмен, массообмен, потоки массы, концентрация алюминия, размеры, расположение таблеток.*

V. A. Alov, Y. M. Gorovoy, A. N. Popkov

Yaroslavl State Technical University
Yaroslavl, Russia, e-mail: popkowan@list.ru

OPTIMIZATION OF INJECTION IRON INOCULATION IN THE LADLE WITH EXOTHERMIC TABLETS

There is calculation of linear sizes of cylindrical additives (tablets) for nanomodification cast iron with using of aluminothermics and selfspreading hightemperature synthesis. It is used with ladle processing without mechanical mixing with consideration of hydrodynamical conditions and criterial of heat and mass exchange. It promotes the even distribution of aluminium on the whole volume of hotmealt.

Keywords: *cast iron, nanomodification, casting ladle, uptake, heat exchange, mass exchange, mass flown, aluminium concentration, sizes, location*

На протяжении многих лет алюминий является наиболее универсальным химическим элементом, используемый как отдельно, так и в качестве компонента смесевых или комплексных добавок при модифицировании и легировании железоуглеродистых сплавов. Его благоприятное

влияние на чугуны в составе комплексных модификаторов было установлено ещё в 1937-1938 гг. при реализации патента на модификатор SMZ [1]. В частности, алюминий, активно взаимодействуя с кислородом и серой, образует дополнительные или активизирует имеющиеся эндогенные включения, которые могут служить центрами выделения графита при сравнительно небольшом переохлаждении расплава, что значительно снижает вероятность образования отбела.

Как известно, эффективность обработки расплава зависит от способа введения добавок, который обуславливает их расход и стабильность результатов. Наиболее простым и распространённым способом внепечной обработки расплавов, имеющим ряд как технологических преимуществ, так и недостатков, является ковшовый, в котором заданная порция вносимых компонентов перемешивается падающей струёй расплава во всём объёме ковша. Однако, как показали исследования, при введении добавок расплав часто оказывается неравномерно обработанным в объёме ковша: имеются необработанные («застойные») зоны расплава, т. к. некоторые компоненты добавок по причине малых температур плавления и плотности, включая алюминий, растворяются раньше, чем заполняется ковш, или значительная их часть оказывается на поверхности вместе со шлаком. Поэтому для обеспечения однородной обработки всего объёма расплава в ковше его перемешивают или выдерживают в течение длительного времени. Последнее применяется чаще, хотя эффект обработки с течением времени ослабляется или пропадает полностью, повышается расход добавок и значительно снижается температура расплава. Поэтому с целью уменьшения перечисленных недостатков иногда в состав комплексных добавок дополнительно вводят экзотермические компоненты, например, алюминий и оксиды железа, титана, хрома [2–4]. Эти компоненты создают условия для протекания в расплаве гибридных процессов металлотермии (алюминотермии) и самораспространяющегося высокотемпературного синтеза, которые отличаются высокой степенью обработки расплава [5]. Высокие температуры (>3000 °C) протекания гибридных процессов способствует полному разделению жидких металлических и шлаковых фаз при относительно низких температурах самого расплава. Жидкофазное состояние тугоплавких продуктов в таких процессах позволяет решать практические задачи не только в области наномодифицирования, но и упрочнять матрицу (железо) молекулярными соединениями тугоплавких фаз типа Al_2O_3 , Fe_xAl_y , Fe_3AlC_x , Al_4C_3 , $AlTi$ и др. с целью создания новых железоматричных композитов с высокой конструктивной прочностью, надёжностью и долговечностью [6, 7]. Поэтому алюминию в данном случае отводится роль «главного дирижёра», количеством которого можно широко варьировать свойства модификатора или легатора, регулировать и управлять про-

цессом обработки расплава в заданном направлении и составе образующихся продуктов взаимодействия. При этом обеспечение равномерного распределения концентрации алюминия по всему объёму расплава в ковше создаёт благоприятные условия для его эффективной обработки, влияющей в итоге на качество отливок [8].

На основании вышеизложенного в данной статье предпринята попытка интенсификации теплообменных процессов для равномерного или однородного распределения концентрации алюминия в расплаве чугуна при ковшовой обработке без механического перемешивания путём изменения гидродинамических условий с использованием методики расчёта линейных размеров добавок в виде цилиндрических таблеток, содержащих алюминотермитную смесь с избытком алюминия, во взаимосвязи со временем их растворения [9].

Форма добавок в виде прессованных цилиндрических таблеток обусловлена малой погрешностью их дозирования, удобными условиями хранения и транспортирования.

В начале обработки определённое количество таблеток, имеющих суммарный объём значительно меньше объёма расплава, вводят в пустой или частично заполненный ковш. При этом если размеры тела, нарушающего тепловое равновесие жидкости (расплава), малы по сравнению с объёмом окружающей его жидкости, то вблизи этого тела возникают условия для свободной конвекции жидкости. Около рассматриваемого тела (таблетки) формируется область теплового и гидродинамического возмущений, а вне её жидкость можно считать неподвижной [10]. Для однозначного определения процесса теплообмена следует учесть форму и размеры возмущающего тела, температуру невозмущённой жидкости, её физические параметры (вязкость, температуропроводность, коэффициент объёмного расширения) и значение ускорения свободного падения.

В условиях свободной конвекции однозначность теплообмена определяется числами Прандтля (Pr) и Грасгофа (Gr).

Число Pr – один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах, учитывающий влияние физических свойств теплоносителя на теплопередачу [11]:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\eta}{\chi} c_p, \quad (1)$$

где $\nu = \eta / \rho$ – кинематическая вязкость (η – динамическая вязкость, ρ – плотность); $\alpha = \chi / \rho c_p$ – коэффициент температуропроводности; χ – коэффициент теплопроводности; c_p – удельная теплоёмкость среды при постоянном давлении.

Число **Pr** характеризует соотношение между интенсивностями молекулярного переноса количества движения и переноса теплоты теплопроводностью, является физической характеристикой среды и зависит только от её термодинамического состояния. У жидких металлов число **Pr** ≤ 1 и незначительно изменяется от колебаний температуры.

Число **Gr** – также критерий подобия, определяющий процесс теплообмена при свободном движении в поле гравитации и являющийся мерой соотношения между подъёмной (архимедовой) силой, вызванной неравномерным распределением плотности в неоднородном поле температур, и силами молекулярного трения, который определяется как

$$\mathbf{Gr} = \frac{gL^3\beta(t_c - t_0)}{\nu^2}, \quad (2)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; L – определяющий линейный размер поверхности теплообмена, м; t_c – температура поверхности теплообмена, °С; t_0 – температура теплоносителя, °С; ν – коэффициент кинематической вязкости, м²/с; β – температурный коэффициент объёмного расширения теплоносителя.

Известно, что в горизонтальных слоях, подогреваемых снизу, более холодная жидкость расположена над более тёплой жидкостью. Это приводит к возникновению неустойчивого состояния жидкости. Для характеристики такого состояния используется число Рэля **Ra** – безразмерное число, определяющее поведение жидкости под воздействием градиента температуры. Если число **Ra** больше некоторого критического значения, то равновесие жидкости становится неустойчивым и возникают конвективные потоки. Образуется бифуркация в динамике жидкости (вилочная бифуркация), при этом критическое значение числа **Ra** является точкой бифуркации для динамики жидкости:

$$\mathbf{Ra} = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu \cdot \chi}, \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения; β – коэффициент теплового расширения жидкости; ΔT – разность температур между стенками жидкости; L – характеристический размер области жидкости; ν – кинематическая вязкость жидкости; χ – температуропроводность жидкости.

Число **Ra** можно записать как произведение чисел Грасгофа и Прандтля:

$$\mathbf{Ra} = \mathbf{Gr} \cdot \mathbf{Pr}. \quad (4)$$

Когда перепады температур в жидкости достаточно малы и слой жидкости неподвижен, то **Ra** < 1700 . Если в жидкости возникают периодические ячеистые течения в виде валиков, то **Ra** > 1700 .

Для таблеток с присадками алюминия оценка чисел **Pr**, **Gr** и **Ra** дала следующие соответственно результаты: 0,01; 1200000 и 12000. Эти значения показывают, что при диаметре таблеток 50–100 мм у горизонтальных поверхностей таблеток, находящихся в расплаве, существуют конвективные (вихревые) токи. Следовательно, диффузия алюминия с поверхности таблетки в объём расплава вблизи горизонтальных поверхностей будет определяться не молекулярной диффузией (процессом, аналогичным молекулярной теплопроводности), а конвективной теплоотдачей.

Для определения плотности потока массы алюминия проанализируем принципиальное различие между теплообменом и массообменом в расплаве, используя число Шмидта **Sc**.

Число **Sc** – один из критериев подобия движения жидкости или газов, в которых существенны процессы внутреннего трения и диффузии. Это число является аналогом числа **Pr** и представляет собой отношение коэффициента кинематической вязкости ν жидкости или газа к коэффициенту диффузии D :

$$\mathbf{Sc} = \nu/D, \quad (5)$$

где $\nu = \mu/p$; μ – коэффициент кинематической вязкости; p – плотность.

Число **Sc** характеризует относительную роль молекулярных процессов переноса количества движения и переноса массы примеси диффузией.

Если для чугуна число **Pr** $\approx 0,01$, то теплообмен определяется молекулярной теплопроводностью. При этом число **Sc** ≈ 10 , т. е., массообмен в расплаве осуществляется конвективным массопереносом.

Конвективная массоотдача характеризуется безразмерным коэффициентом массоотдачи – числом Шервуда **Sh** – критерием подобия для массообмена, равное отношению конвективного переноса к диффузии. Оно выражается следующим образом:

$$\mathbf{Sh} = KL/D, \quad (6)$$

где K – коэффициент массообмена; L – характеристическая длина; D – коэффициент диффузии.

Число **Sh** в рассматриваемом случае можно представить в виде отношения

$$\mathbf{Sh} = qd/(D \cdot \Delta C), \quad (7)$$

где q – плотность потока массы алюминия; d – диаметр таблетки; D – коэффициент диффузии алюминия в жидком чугуне; ΔC – разность концентраций алюминия (C_a) в таблетке и на максимальном расстоянии от таблетки, которую примем равной нулю, т. е. $\Delta C = C_a$.

Для металлов рекомендовано использовать безразмерное параметрическое уравнение для связи чисел **Sh**, **Gr** и **Sc** [12]:

$$\mathbf{Sh} = A \cdot \mathbf{Gr}^m \cdot \mathbf{Sc}^n, \quad (8)$$

где A , m , n – параметры, которые подбираются в зависимости от значений вязкости чугуна, коэффициента диффузии алюминия в чугуне и линейных размеров таблетки.

Примечание. Расчёт числа **Sh**, как и любой расчёт по критериальным уравнениям, приближённый: ошибка может превышать 50% от расчитанной величины [13].

Таким образом, верхняя и нижняя зоны конвективного перемешивания вблизи таблетки примерно равны её диаметру, т.е. всплывающая таблетка, создает вокруг себя зону однородной концентрации алюминия равной диаметру таблетки (рис. 1). Затем из этой зоны алюминий диффундирует в остальную часть расплава. Этот тип диффузии имеет молекулярную природу и может быть охарактеризован диффузией алюминия в чугуне.

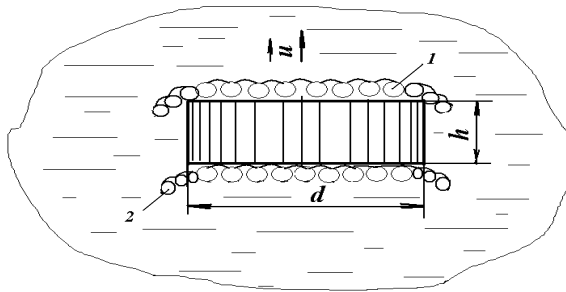


Рис. 1. Образование конвективных (вихревых) токов на горизонтальных поверхностях таблетки при всплывании:

- \vec{u} – вектор скорости всплывания таблетки диаметром d и высотой h ;
1 и 2 – соответственно верхняя и нижняя зоны конвективного перемешивания

Для оценки горизонтального распределения концентрации алюминия в расплаве рассмотрим одномерное (по горизонтали) расплывание следа таблетки, в котором концентрация алюминия повышена. Конвективная диффузия алюминия в чугуне идет быстрее молекулярной, поэтому величина повышенной концентрации алюминия C_a определяется из уравнения баланса массы алюминия [14]:

$$C_a = q / (p_a \cdot u), \quad (9)$$

где q – плотность потока массы алюминия; p_a – плотность алюминия; u – скорость всплывания таблетки.

Точные решения одномерного линейного уравнения (типа уравнения теплопроводности) с кусочно-гладкими начальными условиями и угловой (цилиндрической) симметрией известны. Они выражаются через ци-

линдрические функции Бесселя и могут применяться в инженерных расчётах. Уравнение диффузии в данном случае может рассматриваться в линейной форме, поскольку равновесная температура в расплаве устанавливается со скоростью в несколько тысяч раз больше, чем равновесная концентрация. Поэтому коэффициент диффузии алюминия, который существенно зависит от температуры, можно считать постоянным во времени и средним по сечению ковша, т. е. независимым от координат.

Распределение алюминия в ковше также связано с гидродинамическим поведением расплава. Если сечение потока жидкости достаточно велико, то частицы жидкости при стационарном течении будут перемещаться вдоль линий, называемых *линиями тока*. Например, при истечении идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в боковой стенке или дне широкого сосуда (рис. 2) линии тока начинаются вблизи свободной поверхности жидкости и проходят через отверстие.

В отличие от траектории, которая показывает путь движения одной частицы за определённый промежуток времени, линия тока соединяет разные частицы и даёт некоторую мгновенную характеристику движущейся жидкости в момент времени. Через заданную точку в данный момент времени можно провести только одну линию тока. При установившемся движении в данных точках движущейся жидкости с течением времени не изменяются значения и направления скорости, а также гидродинамическое давление. В этом случае линия тока и траектория частицы, оказавшейся на ней, совпадают и со временем не изменяются, т. е. траектория частиц является линией тока.

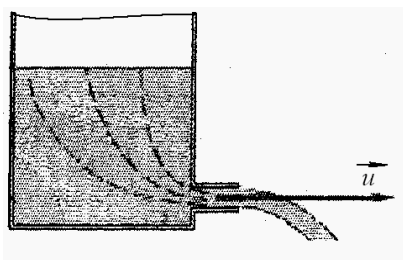


Рис. 2. Схема истечения жидкости из широкого сосуда:

\vec{u} - вектор скорости жидкости

Поскольку истечение расплава из ковша при его повороте происходит достаточно медленно, то движение расплава можно считать квазистационарным процессом. Тогда линии тока расплава будут расположены в приповерхностном слое. Следовательно, при сливе расплава чугуна из

ковша будет осуществляться перемешивание горизонтальных приповерхностных его слоев (рис. 3).

Если в движущейся жидкости выделить весьма малую элементарную площадку перпендикулярную направлению течения и по контуру её провести линии тока, то полученная поверхность называется *трубкой тока*, а совокупность линий тока, проходящих сплошь через площадку, образует так называемую *элементарную струйку* (ЭС), характеризующую движение жидкости в данный момент времени. Совокупность ЭС движущейся жидкости, проходящих через площадку достаточно больших размеров, создаёт *поток жидкости*.

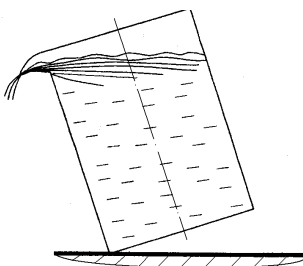


Рис. 3. Схема истечения расплава из ковша

При установившемся движении ЭС обладает следующими свойствами [15]:

1. Форма и положение ЭС с течением времени остаются неизменными, т. к. не изменяются линии тока;
2. Приток жидкости в ЭС и отток из неё через боковую поверхность невозможен, так как по контуру ЭС скорости направлены по касательной;
3. Скорость и гидродинамическое давление во всех точках поперечного сечения ЭС соответственно можно считать одинаковыми ввиду её малой площади.

Из приведенных выше теоретических положений гидродинамики следует, что требования к однородности распределения алюминия по вертикали и по горизонтали различны. Определяющим является вертикальное распределение, поскольку при сливе (вылипании) расплава из ковша линии тока чугуна, как и всякой жидкости, будут сходиться к носику ковша из всех точек горизонтальной поверхности (рис. 4). Поэтому регулирование однородности вертикального распределения алюминия в расплаве возможно путём регулирования скорости всплытия таблетки. Оптимально, если ко времени достижения таблеткой поверхности расплава большая часть её массы успеет раствориться, а в идеальном случае – вся, т. е. изме-

ния линейные размеры (диаметр и высоту), можно регулировать скорость всплытия, а значит, и интенсивность растворения таблетки.

Для расчета времени всплытия таблетки в зависимости от её начальной высоты h_0 и диаметра d рассмотрим подъёмную (архимедову) силу $F(\pi)$, действующую на таблетку, которая определяется как

$$F(\pi) = 0,25g(\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{а}})\pi d^2 \cdot h_0, \quad (10)$$

где g – ускорение свободного падения; $\rho_{\text{ч}}$ – плотность жидкого чугуна; $\rho_{\text{а}}$ – плотность материала таблетки.

Сила сопротивления $F(c)$ всплытию таблетки составит

$$F(c) = 0,25(\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{а}})\pi d^2 c u, \quad (11)$$

где c – коэффициент сопротивления; u – скорость всплытия таблетки.

В условиях достаточно высокой плотности расплава ($\rho_{\text{ч}} = 7,0 \text{ г/см}^3$) можно допустить, что подъёмная сила уравновешивается силой сопротивления, т. е. $F(\pi) = F(c) \Rightarrow c \cdot u = g \cdot h_0$, откуда

$$h_0 = cu/g \quad \text{или} \quad u = g \cdot h_0 / c. \quad (12)$$

Вследствие растворения алюминия в расплаве высота таблетки будет уменьшаться со временем и потому является функцией времени $h(t)$.

Величину потоков массы алюминия Q с двух горизонтальных поверхностей таблетки определим как

$$Q = 2q \cdot 0,25\pi d^2, \quad (13)$$

при этом исходящий поток алюминия будет способствовать уменьшению массы таблетки.

Примем, что с течением времени всплытия площадь горизонтальной поверхности таблетки не изменяется, а уменьшается лишь её высота. Это приводит к уменьшению массы алюминия в таблетке:

$$Q = -\frac{dm_{\text{а}}}{dt},$$

где $m_{\text{а}} = 0,25\pi d^2 \rho_{\text{а}} h(t)$ – масса алюминия. Тогда

$$Q = -0,25\pi d^2 \rho_{\text{а}} \frac{dh(t)}{dt},$$

Отсюда и из (13) получаем $\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{2q}{\rho_{\text{а}}}$. Поэтому

$$h(t_i) = h_0 - \int_{t_0}^{t_i} \frac{2q}{\rho_{\text{а}}} dt = h_0 - \frac{2q}{\rho_{\text{а}}}(t_i - t_0) = 0, \quad (14)$$

где t_0 – начальный момент времени соприкосновения таблетки с расплавом; t_i – время окончания полного растворения таблетки в расплаве при всплытии на поверхность; h_0 – начальная высота таблетки.

Из (14) получаем

$$h_0 = \frac{2qt}{\rho_a}, \quad (15)$$

где $t = t_i - t_0$ – время всплытия таблетки до полного её растворения.

За время dt таблетка всплывёт на величину dl (рис. 4). Тогда под ней в объёме V остаётся диффузионный алюминий массой

$$m_a = \rho_a C_a V = \rho_a C_a 0,25\pi d^2 dl, \quad (16)$$

где C_a – концентрация алюминия около таблетки при её всплытии.

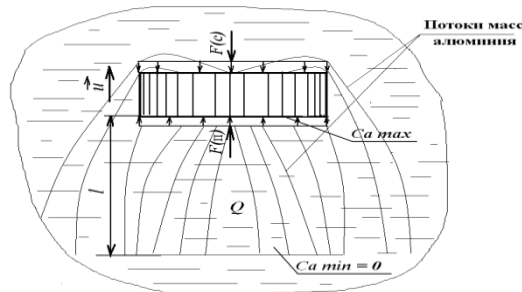


Рис. 4. Схема распределения концентраций алюминия C_a при всплытии таблетки:

Q – величина потока диффузионной массы алюминия;
 $F(p)$ и $F(c)$ – соответственно силы подъёма и сопротивления; l – длина (высота) всплытия; \vec{u} – направление вектора скорости всплытия таблетки

Поток диффузионной массы алюминия Q в расплав составит

$$Q = \frac{dm_a}{dt} = \rho_a C_a 0,25\pi d^2 \frac{dl}{dt} = \rho_a C_a 0,25\pi d^2 u. \quad (17)$$

Поскольку при всплытии таблетки диффузия алюминия в расплав происходит с двух горизонтальных её поверхностей, то из (13) и (17) находим

$$C_a = \frac{2q}{\rho_a u}. \text{ Приняв } u = \frac{h_0 g}{c}, \text{ получим}$$

$$C_a = \frac{2qc}{\rho_a h_0 g}.$$

Для определения взаимосвязи между линейными размерами таблетки (d и h) и временем её всплытия, найдём диаметр таблетки d из выражения (7):

$$d = \frac{\mathbf{Sh} \cdot D \cdot \Delta C}{q} . \quad (18)$$

Подставляя сюда выражение $q = h_0 \rho_a / 2t$ из формулы (15) получим

$$d = \frac{2 \cdot \mathbf{Sh} \cdot D \cdot \Delta C \cdot t}{h_0 \rho_a} . \quad (19)$$

Поскольку число \mathbf{Sh} рассчитывается приближённо по таблицам с погрешностью 50% [13], то для определения искомым практических результатов удвоим значение диаметра d , т. е. получим следующее соотношение [9]:

$$\frac{2\mathbf{Sh} \cdot D \cdot \Delta C \cdot t}{h_0 \rho_a} \leq d \leq \frac{4\mathbf{Sh} \cdot D \cdot \Delta C \cdot t}{h_0 \rho_a} , \quad (20)$$

которое позволяет найти допустимые размеры диаметра таблетки для равномерного распределения концентрации алюминия в расплаве в течение определённого времени. На практике при ковшовой обработке расплава используют в основном несколько таблеток (минимум – три), поэтому есть смысл рассмотреть их рациональное расположение внутри ковша перед его заполнением.

При сливе расплава из ковша, как указывалось ранее, происходит перемешивание различных слоёв (трубок тока) расплава, как при ламинарном, так и при турбулентном режимах выливания. Очевидно, что первыми выльются слои, расположенные внутри носика ковша, последними – придонные слои, расположенные на противоположной стороне от носика. Следовательно, на дне вблизи носика необходимо располагать быстро всплывающие таблетки. На противоположной от носика стороне ковша необходимо располагать медленно всплывающие таблетки, а в центре ковша – основную массу таблеток, которые при всплытии должны как максимум раствориться, т. е. нижний горизонтальный контур дна ковша (рис. 5) можно условно поделить на три очередные последовательные зоны: *I* – вблизи носика ковша; *II* – центр ковша; *III* – максимальное удаление от носика.

Эксперименты, включая технологические и механические испытания, показали, что на дне вблизи носика и на максимальном удалении от него должны располагаться не более трети от общей массы таблеток и не менее трети от общей массы – в центре ковша. При этом диаметр таблеток, располагаемых вблизи носика ковша должен составлять менее половины

диаметра таблеток, расположенных в центре ковша, а диаметр таблеток, расположенных в максимальном удалении от носика ковша, в четыре раза и более должен превышать диаметр таблеток, расположенных в центре [9, 16-17].

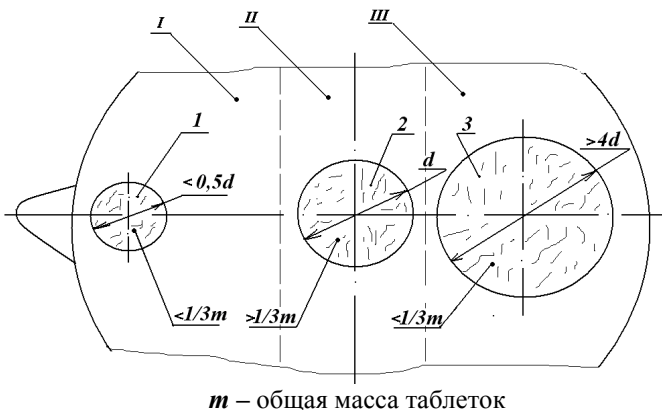


Рис. 5. Схема расположение таблеток 1, 2 и 3 (минимум – 3 шт.) на дне ковша перед наполнением расплавом в зонах I, II и III – соответственно вблизи носика ковша, в центре ковша, на максимальном удалении от носика ковша с рекомендуемыми размерами диаметров и масс таблеток

В качестве примера для осуществления предлагаемого решения с целью достижения однородного распределения концентрации алюминия в жидком чугуна использовались таблетки диаметром 1 см – вблизи носика ковша, 4 см – в центре ковша, 20 см – на максимальном удалении от носика. Время всплытия таблетки, расположенной в центре, составило 5с. Масса таблеток, расположенных вблизи носика и на максимальном удалении от него, составила по 20% от общей массы таблеток. Таким образом, разработанное соотношение позволяет рассчитывать линейные размеры таблеток, содержащих алюминий и компоненты термитной смеси, во взаимосвязи с внутренними размерами ковша и обеспечивать практически совпадение времени растворения таблеток со временем их всплытия, что должно способствовать формированию однородного распределения концентрации алюминия по высоте расплава в ковше. Для повышения эффективности распределения концентрации алюминия необходимо использовать кроме основных таблеток ещё и вспомогательные, расположенные в зонах I и III (см. рис. 5), массы которых должны составлять по 20–25% от общей массы таблеток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Harak L.* Vliv kliniku na očkovanl šdých litin / L. Harak, M. Hala // *Slevárestvi*. 1980. 28, № 9. S. 360-363.
2. Модифицирование серого чугуна термическими смесями / В.А. Алов, С.П. Кожемякин, В.Н. Молев [и др.] // *Литейное производство*. 1984. № 9. С. 25.
3. *Алов В.А.* Модифицирование серого чугуна с использованием алюминотермии // *Электротехн. пр-во. Передовой опыт и научн.-техн. достижения*. 1990. вып. 5. С. 18.
4. Модифицирование чугуна экзотермическими таблетками / В.А. Алов, Т.А. Ахунов, С.П. Кожемякин [и др.] // *Литейное производство*. 1992. № 1. С. 27.
5. Применение самораспространяющегося высокотемпературного синтеза в литейном производстве / А.А. Жуков, В.И. Юхвид, И.П. Боровинская [и др.] // *Литейное производство*. 1984. № 11. С. 2-3.
6. Патент № 2376101 РФ. Комплексная экзотермическая смесь. Оpubл. 20.12.2009 / Алов В.А., Карпенко М.И., Епархин О. М. [и др.].
7. Патент № 2454294 РФ. Комплексная экзотермическая смесь. Оpubл. 27.06.2012 / Алов В. А., Карпенко М. И., Епархин О.М. [и др.].
8. *Борковски С.* Внепечная обработка серого чугуна экзотермическими смесями / С. Борковски, К.И. Ващенко, Д.Ф. Чернега // *Литейное производство*. 1985. С. 3-4.
9. Заявка № 2012101561 РФ, опубл. 07.27.2013. Способ получения тонкостенных отливок из железоуглеродистых сплавов / Алов В.А., Горовой Ю.М., Епархин О.М.
10. *Кутеладзе С.С.* Основы теории теплообмена. М.: Энергоатомиздат, 1979. 416 с.
11. *Кафаров В.В.* Основы массопередачи. М.: Высшая школа, 1962. 654 с.
12. *Кутеладзе С.С.* Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: справоч. пособие. М.: Энергоатомиздат, 1990. 365 с.
13. *Михеев М.А.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 345 с.
14. *Гухман А.А.* Применение теории подобия к исследованию процессов тепло- и массообмена: процессы переноса в движущейся среде. М.: Изд-во ЛКИ, 2010. 328 с.
15. *Сычëв В.В.* Сложные термодинамические системы. М.: Энергоатомиздат, 1986. 209 с.
16. *Alov V.* Evaluation of Nanomodificators Distribution for cast Iron Im pravement / V. Alov, O. Eparkhin, U. Gorovoy, A. Popkov // *International Fadtration for Heat Theatment and Surface Engineering Congress*, October, 23-25, 2012, China. P. 955-958.
17. Патент № 2516427 РФ. Способ получения тонкостенных отливок из чугуна, легированного алюминием. Оpubл. 20.05.2014 / Алов В.А., Горовой Ю.М., Епархин О.М. [и др.].

УДК 66.048

А. И. Балунов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: balunovai@ystu.ru

ПРИНЦИП ДИХОТОМИИ В ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА РЕКТИФИКАЦИИ

Рассмотрены постановки задач оптимизации процесса ректификации многокомпонентных смесей по информационному критерию оценки качества разделения. Приведены условия оптимальности задач выбора оптимальной последовательности разделения многокомпонентной смеси, отбора продуктов и места ввода питания в колонну. Показано, что полученные условия оптимальности соответствуют принципу дихотомии и не противоречат технико-экономическим и термодинамическим критериям оптимальности.

Ключевые слова: ректификация, математическое моделирование, оптимизация, принцип максимальной энтропии, принцип минимальной энтропии, принцип дихотомии

A. I. Balunov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: balunovai@ystu.ru

PRINCIPLE OF DYCHOTOMY IN OPTIMIZATION OF THE RECTIFICATION PROCESS

The formulation of problems for optimizing the process of rectification of multi-component mixtures according to the information criterion for assessing the quality of separation is considered. Conditions for the optimality of problems of choosing the optimal sequence for separating a multicomponent mixture, selecting products, and the location of feed input into the column are given. It is shown that the obtained optimality conditions correspond to the principle of dichotomy and do not contradict the technical, economic and thermodynamic criteria of optimality.

Keywords: rectification, mathematical modeling, optimization, principle of maximum entropy, principle of minimum entropy, principle of dichotomy

Введение. Одним из направлений математического моделирования и оптимизации процессов химической технологии, успешно развивающимся в последние десятилетия, является энтропийно-информационный

метод [1–5]. При описании технологических процессов в нем используется информационный принцип максимальной энтропии (энтропийный метод моделирования), который позволяет получить наиболее вероятный результат на основе достоверной, но неполной исходной информации [6]. Информационная энтропия в этом методе оценивает неопределенность обнаружения микрочастиц (молекул) каждого типа (компонента) в рассматриваемой системе и является критерием максимального правдоподобия. При оптимизации основной целевой функцией является информационный критерий, оценивающий степень организованности системы на основе устраненной неупорядоченности или количеством заблокированного разнообразия [7]. Информационная энтропия в этом случае оценивает неупорядоченность потоков.

Поскольку в близких к идеальным дискретным смесях вероятность обнаружения частиц определенного типа равна их мольной доле, то информационную энтропию можно рассчитать на основе состава смеси [1].

Применение энтропийно-информационного метода позволило сформулировать на едином аксиоматическом принципе иерархическую (системную) последовательность расчета многоколонных ректификационных установок с тремя основными этапами: выбор последовательности разделения многокомпонентной смеси – декомпозиция системы (установки) на подсистемы (ректификационные колонны) – расчет каждой колонны в отдельности. При этом получены условия, позволяющие выбрать оптимальные значения режимных и конструктивных параметров на каждом этапе расчета системы [2, 8, 9]. Анализ и обобщению этих условий оптимальности посвящена настоящая работа.

1. Критерий относительной оценки качества разделения. Для оценки степени организованности системы английским биологом и кибернетиком Р. Эшби был предложен универсальный критерий [7]:

$$\eta = \frac{H_{\text{вх}} - H_{\text{вых}}}{H_{\text{вх}}}. \quad (1)$$

Здесь $H_{\text{вх}}$, $H_{\text{вых}}$ – информационные энтропии, оценивающие неупорядоченность потоков на входе и выходе системы.

Так как разность в числителе выражения (1) есть количество информации, то критерий можно рассматривать также как информационный

$$\eta = \frac{I}{I_{\text{max}}},$$

где I – количество информации.

В термодинамической интерпретации для разделительных систем критерий η представляет собой отношение термодинамически минималь-

ной работы разделения исходной, близкой к идеальной, смеси на заданные продукты к аналогичной работе разделения той же смеси на абсолютно чистые продукты. Поскольку он записывается в форме отношения, то это уменьшает ошибки, связанные с допущением об идеальности смеси, и исключает температуру. Известно, что такой критерий не противоречит критериям, построенным на технико-экономической оценке [10].

Для двухпродуктовой ректификационной колонны

$$H_{\text{вх}} = H_F = -F \sum_i z_i \ln z_i \quad \text{и} \quad H_{\text{вых}} = H_D + H_W = -D \sum_i x_i^+ \ln x_i^+ - W \sum_i x_i^- \ln x_i^- ,$$

тогда

$$\eta = [H_F - (H_D + H_W)] / H_F .$$

Здесь H_F , H_D , H_W – информационные энтропии питания, дистиллята и кубового продукта соответственно; F , D , W – мольные расходы питания, дистиллята и кубового продукта; z_i , x_i^+ , x_i^- – мольные концентрации i -го компонента в питании, дистилляте и кубовом продукте. В общем случае число входных и выходных потоков может быть любым.

С помощью этого критерия удобно оценивать разделительную способность (разделительную мощность) ректификационной колонны – чем больше разность $H_F - (H_D + H_W)$, т.е. количество информации, тем выше разделительная способность колонны и тем лучше качество разделения.

Критерий (1) нормирован на единицу. Максимально возможная разделительная способность соответствует $H_D = 0$ и $H_W = 0$. Тогда $I = I_{\text{max}} = H_F$ и $\eta = 1$. Это отвечает гипотетическому случаю разделения бинарной смеси на чистые продукты или многокомпонентной смеси на две чистые фракции. Практически такой режим недостижим, так как требуется колонна с неограниченным числом ступеней разделения. Наоборот, когда процесс сводится к простому делению смеси на две части одинакового исходного состава, то $H_D + H_W = H_F$ и $\eta = 0$.

В задачах оптимизации процессов разделения критерий (1) используется как относительная оценка качества разделения. Для действующей колонны естественно добиваться максимального значения критерия η . Если величина H_F фиксирована (состав питания задан), то максимизация η сводится к минимизации энтропии выходных потоков, что соответствует максимуму термодинамической работы разделения.

Таким образом, в задачах оптимизации, связанных с максимальной организованностью системы ($\eta \rightarrow \max$) при фиксированной энтропии входных потоков, реализуется принцип *минимальной* энтропии ($H_{\text{вых}} \rightarrow \min$).

2. Распределение компонентов в граничных сечениях колонны

Если в задачах поиска оптимальных режимных и конструктивных параметров используется принцип минимальной энтропии, то при математическом описании процесса применяется принцип *максимальной* энтропии ($H \rightarrow \max$). На основе этого принципа рассмотрим постановку и приведем решение одной из основных задач в системном расчете колонн ректификации – определение составов продуктовых потоков колонны. При решении этой задачи учитывается, что связь между ними не может быть описана во всех деталях ввиду сложности и стохастической природы процесса, а любое упрощение процесса может привести к ошибке, величину которой заранее трудно оценить. В такой ситуации закон распределения компонентов находится только как наиболее вероятный, т.е. наименее предвзятый из всех, которые можно было бы принять в условиях объективно существующей неопределенности.

Заданными величинами в этой задаче являются: мольный состав разделяемой смеси (питания), свойства (коэффициенты относительных летучестей) компонентов, отборы продуктов и параметр, задающий степень разделения смеси в колонне. В качестве ограничений используются уравнения трех типов: балансовые соотношения для каждого компонента, уравнения нормировки концентраций и уравнение, вводящее свойства компонентов и одновременно фиксирующее степень разделения при постановке задачи [2–4]. Последнее ограничение является характерной особенностью энтропийного метода моделирования [6].

Таким образом, задача заключается в нахождении таких составов дистиллята и кубового продукта, которые максимизируют информационную энтропию выходных потоков колонны при сформулированных выше ограничениях. Для решения используется метод Лагранжа. Окончательные зависимости можно привести к форме удобной как для проектного расчета, так и для поверочного, который используется при оптимизации действующих аппаратов.

В первом случае задается требование к качеству разделения смеси в виде фиксированной концентрации целевого компонента в одном из выходных потоков, а определению подлежат составы продуктовых потоков и основная высота колонны. Расчетные зависимости при проектном расчете имеют форму

$$x_i^+ = z_i / \left[\varepsilon_y + \varepsilon_x \left(x_n^- / x_n^+ \right) \left(\alpha_i / \alpha_n \right)^{-\lambda} \right], \quad (2)$$

$$x_i^- = z_i / \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y \left(x_n^+ / x_n^- \right) \left(\alpha_i / \alpha_n \right)^{\lambda} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^+ = 1. \quad (4)$$

Здесь α_i – коэффициент относительной летучести i -го компонента; ε_y , ε_x – мольные расходы дистиллята и кубового продукта, приведенные к 1 молью питания (относительные расходы продуктов); λ – множитель Лагранжа в условной экстремальной задаче (корень нелинейного уравнения (4)); n – номер компонента, концентрация которого задана; m – число компонентов в смеси.

Решению (2), (3) отвечает линейно-логарифмическое соотношение

$$\lambda = \ln \frac{x_i^+ x_n^-}{x_i^- x_n^+} / \ln \frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \quad i, n = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq n,$$

которое совпадает с известным уравнением Фенке-Андервуда.

Таким образом, в этой задаче множитель Лагранжа λ приобретает физический смысл минимального числа теоретических ступеней разделения и характеризует разделительную способность (условную высоту) колонны.

Во втором случае задается условная высота колонны (параметр идентификации модели λ), а определяются составы продуктовых потоков колонны:

$$x_i^+ = z_i / \left[\varepsilon_y + \varepsilon_x \left(\alpha_i / \alpha_{zp} \right)^{-\lambda} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$x_i^- = z_i / \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y \left(\alpha_i / \alpha_{zp} \right)^{\lambda} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

где α_{zp} – коэффициент относительной летучести гипотетического граничного компонента, для которого справедливо условие $x_{zp}^+ = x_{zp}^- = z_{zp}$ (корень нелинейного уравнения (4)).

В рассмотренном методе допускается, что составы продуктовых потоков колонны, рассчитанные для минимального числа ступеней разделения, не зависят от флегмового режима, места ввода и доли испаренного питания. Эта информация опускается, т.е. принимается, что заданному разделению может соответствовать множество конструктивных и режимных параметров, которые учитываются на следующих этапах расчета. Если же эта информация (или часть ее) известна, то решение задачи можно несколько уточнить, применив алгоритм, в котором зависимости (2)–(6) используются для расчета наиболее вероятных составов выходных потоков секций колонны [11]. Так как составы входных потоков каждой из секций зависят от первоначально неизвестных составов выходных потоков другой секций, а также неизвестных составов продуктовых потоков колонны, алгоритм носит итерационный характер и сводится к многократному после-

довательному расчету секций колонны до стабилизации составов в граничных сечениях.

Исходными данными для итерационного расчета являются: z_i , α_i , ε_y ($\varepsilon_x = 1 - \varepsilon_y$), флегмовое число, доля испаренного питания, а также x_n^+ , λ^- (или x_n^- , λ^+) при проектном расчете и λ^+ , λ^- при поверочном. Здесь λ^+ и λ^- – множители Лагранжа для верхней (исчерпывающей) и нижней (укрепляющей) секций колонны. В этой задаче они имеют физический смысл, аналогичный множителю λ в уравнениях (2)–(6), и характеризуют разделительную способность секций колонны. Разделительная способность всей колонны $\lambda_0 = \lambda^+ + \lambda^-$. В предельном режиме полного орошения $\lambda_0 = \lambda$, в рабочих флегмовых режимах $\lambda_0 > \lambda$. Очевидно, что множители λ^+ и λ^- фиксируют положение узла питания в колонне, а при поверочном расчете являются также параметрами идентификации модели.

Поскольку при завершении расчета становится известной вся необходимая информация для дальнейшего расчета каждой их секций колонны в отдельности, итерационный алгоритм называют декомпозиционным [11]. Несмотря на то, что он содержит итерационную процедуру, последняя здесь значительно проще и надежнее в сравнении с традиционными методами расчета. При этом алгоритм сохраняет основные преимущества энтропийного метода – меньший объем исходной информации и существенное сокращение времени расчета.

3. Дихотомия как оптимальное решение в условиях ограниченной исходной информации

3.1. Оптимальная последовательность разделения смеси. Задача о разделении многокомпонентной смеси на отдельные компоненты или группы компонентов (фракции) в системе двухпродуктовых ректификационных колонн предполагает выбор границы разделения на каждой колонне системы. Решению этой задачи посвящено большое число исследований [2, 12–16]. В частности, в работе [2] такая задача решена по условию $\eta \rightarrow \max$ при допущении о полном разделении смеси, когда в ректификационной колонне нет ни одного компонента, распределяющегося одновременно между дистиллятом и кубовым продуктом. В этом случае критерий (1) принимает форму, которая с точностью до постоянного множителя $1/H_{\text{вх}}$ совпадает с информационной энтропией при двух исходах опыта (энтропией выбора)

$$\eta = \left[-\varepsilon_y \log \varepsilon_y - (1 - \varepsilon_y) \log(1 - \varepsilon_y) \right] / H_{\text{вх}} . \quad (7)$$

Известно, что энтропия выбора максимальна в случае равновероятных событий, следовательно, максимуму выражения (7) отвечает условие $\varepsilon_y = 0,5$. Таким образом, при отсутствии какие-либо специальных ограничений оптимально в колонне делить смесь «пополам» – *принцип дихотомии*.

Последовательно применяя принцип дихотомии на каждом шаге разделения (каждой ректификационной колонне), можно получить оптимальную последовательность разделения прямым синтезом системы разделения без перебора возможных вариантов. Поскольку для многокомпонентных смесей не всегда возможно выбрать границу, одновременно удовлетворяющую полному и «половинному» делению, применять принцип дихотомии необходимо с учетом дискретного состава смеси, максимально приближаясь к дихотомному делению. При этом, как правило, будет наблюдаться отклонение от теоретически оптимальной границы разделения смеси «пополам».

Отметим, что система разделения, в которой выходные потоки на каждой колонне приблизительно одинаковы, является наилучшей и с точки зрения необратимых затрат энергии на разделение [16].

Однако оптимальное разделение на каждой отдельной колонне не всегда обеспечивает оптимальность разделения смеси в системе колонн в целом. Поэтому применительно к многоколонной ректификационной установке возможен другой алгоритм выбора оптимальной схемы. Учитывая аддитивные свойства энтропии, в качестве критерия оптимальности системы разделения можно использовать сумму энтропий выбора отдельных ректификационных колонн [2]. В этом случае требуется перебор всех вариантов схем разделения, однако расчет каждого варианта элементарен, так как в нем участвуют только относительные отборы продуктов (см. (7)). Максимально возможное значение такого критерия соответствует теоретически оптимальной границе разделения смеси в каждой из n колонн системы

$$H_{\max} = -n(0,5 \log 0,5 + 0,5 \log 0,5) = n \log 2.$$

Практика расчетов показала, что в подавляющем большинстве случаев оба алгоритма выбора приводят к одной и той же оптимальной схеме разделения. Однако в случаях, когда на границе деления смеси находятся компоненты с малыми концентрациями, схема с максимальной энтропией выбора может не совпадать с оптимальной схемой, полученной по принципу дихотомии [2].

В работе [13] на основе проведенного численного исследования показано, что системе с максимальной суммарной энтропией выбора соответствует наименьшая суммарная протяженность процесса (наименьшее суммарное число теоретических ступеней разделения) и наоборот.

3.2. Оптимальный отбор продуктов. Исследованию зависимости критерия (1) от отбора продуктов разделения колонны (дистиллята и кубового продукта) в проектной и поверочной постановках задачи посвящена работа [8]. В ней необходимые для расчета критерия η составы продуктовых потоков находились как наиболее вероятные (2)–(6). Анализ полученных результатов показал, что зависимость критерия η от отбора продукта в поверочной постановке задачи имеет несколько экстремумов, число которых при достаточно высокой четкости разделения (большом значении λ) равно числу возможных границ деления смеси в колонне. При этом отборы, отвечающие экстремумам η , удовлетворяют условию

$$\varepsilon_y^{\text{опт}} \approx \sum_{i=1}^k z_i, \quad (8)$$

а отбор, соответствующий глобальному экстремуму этого критерия, наиболее близок к делению смеси «пополам» – *принцип дихотомии*. Здесь k – номер наиболее высококипящего компонента из обогащаемых в дистиллят.

Отсутствие экстремума на кривой $\eta(\varepsilon_y)$ при отборе, соответствующем условию (8), свидетельствует о недостаточной разделительной способности колонны для оптимального деления смеси по выбранной границе.

Отметим, что аналогичное условие ранее было получено в результате численного эксперимента, проведенного с использованием традиционной «потарелочной» модели процесса ректификации, и названо условием оптимальной статики [17]. Оно выполняется тем строже, чем выше степень разделения смеси в колонне. В гипотетической колонне с неограниченно большим числом ступеней разделения это условие становится единственно возможным при заданной границе деления смеси.

Интересно отметить, что оптимальные отборы, найденные по условию (8) при фиксированной высоте колонны (поверочной расчет), соответствуют отборам, при которых в проектной постановке задачи расчета колонны заданное качество разделения можно получить при минимальном числе теоретических ступеней разделения (минимальном значении λ). Это указывает на непротиворечивость (системность) целевых функций η и λ , которые могут быть использованы при выборе оптимальных отборов при проектировании ректификационных колонн и управлении действующими колоннами [8].

3.3. Оптимальное место ввода питания. Место ввода питания в колонну ректификации является одним из параметров, оптимальное значение которого находят как при проектировании новых аппаратов, так и при управлении действующими. При проектировании от выбора места ввода питания зависит число ступеней разделения (условная высота) колонны и, сле-

довательно, капитальные затраты, необходимые для достижения заданного качества разделения. В действующих аппаратах этот параметр влияет на качество разделения смеси и может его повысить без существенного дополнительного привлечения капитальных и (или) энергетических затрат [2].

В работе [9] с использованием энтропийной математической модели процесса (2)–(6) проведено численное исследование зависимостей от места ввода питания таких целевых функций, как критерий оценки качества разделения η , условная высота колонны λ_0 и производство энтропии в узле питания ΔH [2]. Целесообразность выбора ΔH в качестве критерия оптимальности обусловлена следующим соображением. Разделение в колонне можно рассматривать как процесс, предназначенный для снижения неупорядоченности потока питания, измеряемой энтропией. Однако в узле питания, вследствие смешения потоков, неупорядоченность не только не уменьшается, но даже несколько возрастает. Следовательно, правильно выбранное место ввода питания в колонну должно обеспечивать минимально возможное повышение неупорядоченности.

В упомянутом выше исследовании варьируемым параметром, фиксирующим положение узла питания, являлась условная высота одной из секций колонны, а значение аналогичного параметра для другой секции определялось в проектном расчете из условия обеспечения заданного качества разделения (при этом находилась также условная высота всей колонны λ_0), а в поверочном – из условия $\lambda_0 = \text{const}$.

В результате проведенного анализа установлено, что при разделении бинарных смесей и выполнении условия $\varepsilon_y = e = z_1 = 0,5$ оптимальное место ввода питания, найденное в проектном расчете по всем трем критериям оптимальности и по критериям η , ΔH в поверочном расчете, находится строго в середине колонны ($\lambda^+ = \lambda^-$) – *принцип дихотомии*. В случае разделения бинарных смесей иного состава при условии $\varepsilon_y = e = z_1$, а также

многокомпонентных смесей при условии $\varepsilon_y = e = \sum_{i=1}^k z_i$ оптимальное место ввода приближается к середине колонны с увеличением четкости разделения, достигая условия $\lambda^+ = \lambda^-$ при гипотетическом полном разделении. Это обстоятельство позволяет сформулировать системный (непротиворечивый) выбор оптимального места ввода питания в колонну, при котором оно находится по условию $\lambda_0 \rightarrow \min$ на этапе проектирования колонны и по условию $\eta \rightarrow \max$ на этапе управления. При этом одновременно осуществляется оптимальная декомпозиция колонны на исчерпывающую и укрепляющую секции (см. п. 2).

Заключение. Для ряда задач расчета систем ректификации показано, что условия оптимальности по информационному критерию оценки разделительной способности системы соответствуют принципу дихотомии и не противоречат термодинамическим и технико-экономическим критериям оптимальности. Оптимальные решения получены на основе ограниченной исходной информации и являются непротиворечивыми (системными) для задач проектирования ректификационных установок и управления действующими установками.

Интересно отметить, что условия оптимальности, отвечающие принципу дихотомии, получены и для таких разделительных химико-технологических систем, как абсорбер-десорбер [18] и фракционирующий абсорбер-ректификационная колонна [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энтропийные методы моделирования в химической технике / под ред. В.П. Майкова М.: МИХМ, 1981. 88 с.
2. *Балунов А.И.* Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2003. Т. 46, № 9. С. 54–67.
3. *Балунов А.И.* Расчет составов продуктовых потоков сложных ректификационных систем на основе принципа максимальной энтропии / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2013. Т. 56, № 9. С. 96–102.
4. *Балунов А.И.* Расширенный принцип максимальной энтропии для описания процесса фазовых превращений в атермальной системе / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2014. Т. 57, № 12. С. 93–59.
5. *Майков В.П.* Условная энтропия в описании свойств атермальности / В.П. Майков, А.И. Балунов // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2004. Т. 47, № 8. С. 76–81.
6. *Jaynes E.T.* Probability theory: The logic of science. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 727 p.
7. *Эйбис У.Р.* Введение в кибернетику. URSS, 2017. 430 с.
8. *Балунов А.И.* Оптимальный отбор продуктов в процессе ректификации. Энтропийно-информационный анализ / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2013. Т. 56, № 4. С. 97–106.
9. *Балунов А.И.* Выбор оптимального места ввода питания в колонну при многокомпонентной ректификации / А.И. Балунов, А.Г. Саткунас, Г.Г. Вилков // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2013. № 2. С. 29–33.
10. *Чайченец Н.С.* Исследование связи термодинамических и технико-экономических критериев оптимальности в ректификационных системах, разделяющих идеальные смеси / Н.С. Чайченец, В.П. Майков, И.П. Усюкин // Теорет. основы хим. технологии. 1977. Т. 11, № 4. С. 598–605.
11. *Балунов А.И.* Декомпозиционный алгоритм расчета многокомпонентной ректификации // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2011. № 3. С. 65–67.

12. Синтез оптимальных схем ректификации многокомпонентных смесей методом динамического программирования / В.В. Кафаров, Ф.Б. Петлюк, С.А. Гройсман, Ю.К. Телков, М.В. Белов // Теор. основы хим. технологии. 1975. Т. 9, № 2. С. 262–269.
13. *Майков В.П.* Выбор термодинамически оптимальных схем разделения при ректификации / В.П. Майков, И.С. Лагутина // Химия и технология топлив и масел 1981. № 3. С.40–44.
14. Оптимальный синтез системы простых ректификационных колонн / Г.М. Островский, Н.Н. Зиятдинов, Ф.У. Мустафина, Д.А. Рыжов // Теор. основы хим. технологии. 2013.Т. 47, № 6. С. 646–655.
15. *Серафимов Л.А.* Выбор оптимальных технологических схем ректификации многокомпонентных смесей / Л.А. Серафимов, Т.В. Челюскина, П.О. Мавлеткулова // Теорет. основы хим. технологии. 2015. Т. 49, № 1. С. 44–53.
16. *Цирлин А.М.* Математическая модель процесса ректификации и выбор порядка разделения многокомпонентных смесей / А.М. Цирлин, И.А. Сукин, А.И. Балуннов // Математ. моделирование. 2020. Т. 32, № 10. С. 47–61.
17. *Гальцов А.В.* Термодинамически оптимальные условия многокомпонентной ректификации / А.В. Гальцов, В.П. Майков // Теорет. основы хим. технологии. 1973. Т.7, № 2. С. 170–175.
18. *Майков В.П.* Аналитический метод расчета оптимальной статик процесса абсорбции-десорбции / В.П. Майков, В.И. Мурашко // Теорет. основы хим. технологии. 1975. Т. IX. № 6. С. 828–833.
19. *Вилков Г.Г.* Анализ разделительной системы фракционирующей абсорбер-ректификационная колонна / Г.Г. Вилков, А.И. Балуннов, М.А. Васильев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1981. Т. 24, № 11. С. 1441–1445.

УДК 51-74

А. В. Гусаров

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: alvgus@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ЛУЧА

В статье рассматривается математическая модель цифровой системы регулирования положения электронного луча в установке для электронно-лучевого нанесения покрытий. Датчик положения электронного луча регистрирует распределение потока электронов, отраженных от поверхности расплавленного материала, и формирует нормированный позиционный сигнал.

Ключевые слова: математическая модель, система регулирования, однокоординатный датчик, переходный процесс

A. V. Gusarov

P. A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology
Russia, Rybinsk, e-mail: alvgus@mail.ru

BEAM POSITION SENSOR CONTROL SYSTEM MATHEMATICAL MODEL

The paper discusses a mathematical model of a digital electron beam position control system in an electron beam coater. Electron beam position sensor detects distribution of electron flow reflected from surface of melt-fused material and generates normalized positional signal.

Keywords: mathematical model, control system, single-coordinate sensor, transient

Получение высококачественных жаростойких и атмосферостойких покрытий обычно выполняется путем их нанесения в вакууме с целью исключения влияния остаточных газов и прочих примесей, находящихся в воздухе [1]. При этом качество получаемых покрытий во многом определяется стабильностью процесса передачи мощности в зону испарения, которая осуществляется электронным пучком. Зона испарения обычно представляет собой водоохлаждаемый тигель. Ручная стабилизация процесса затруднена вследствие трудности распознавания положения фокального

пятна электронного пучка на поверхности тигля. Поэтому в РГАТУ имени П.А. Соловьева разработана система регулирования положения электронного луча с датчиком отраженных электронов [2].

Структурная схема цифровой системы регулирования приведена на рис. 1.

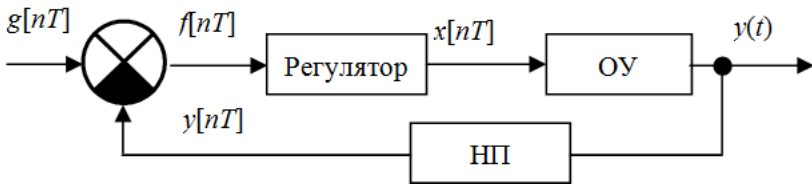


Рис. 1. Структурная схема системы регулирования

Цифровая система регулирования функционирует в дискретном времени nT , где T – период дискретизации, s , а n – номер периода в виде бесконечной последовательности целых положительных чисел, начиная с нуля [3]. Объект управления (ОУ) представляет собой электромагнитную систему отклонения электронного луча. Устройство сравнения формирует рассогласование между уставкой $g[nT]$ и позиционным сигналом $y[nT]$, которые представляют собой числовые значения, представленные в двоичном коде. Регулятор формирует на выходе задающее воздействие $x[nT]$, которое изменяет ток в системе отклонения и, соответственно, положение электронного луча $y(t)$. Положение фокального пятна электронного луча в виде координаты $y(t)$ преобразуется нормирующим преобразователем в значение $y[nT]$ в диапазоне от -1 до 1 [1, 3]. Квадратные скобки $[nT]$ означают, что значения являются дискретными и определены только в дискретные моменты времени nT . Круглые скобки (t) означают, что значение является непрерывным и определено в любой момент времени (t) , в том числе и в дискретные моменты времени $[nT]$.

Передаточную функцию объекта управления как непрерывного звена в виде последовательности дифференцирующего (электромагнитная катушка) и интегрирующего (усилитель тока) можно записать в виде

$$W_{\text{ОУ}}(p) = \frac{k_{\text{ОУ}} \cdot p}{p + a}, \quad (1)$$

где $k_{\text{ОУ}}$ – коэффициент передачи объекта управления, В/А; a – постоянная времени объекта управления, 1/с.

Цифровой регулятор представляет собой дискретный аналог форсирующего звена с передаточной функцией

$$W_p(p) = k_d \cdot (\tau_d \cdot p + 1), \quad (2)$$

где k_d – коэффициент передачи звена, В; τ – постоянная времени звена, с.

Для перехода к цифровому регулятору выполним численное интегрирование с использованием метода обратных разностей, используя подстановку

$$p = \frac{z-1}{z \cdot T}, \quad (3)$$

где z – оператор дискретного z -преобразования; T – период дискретизации, с.

Приведем полученное выражение к каноническому виду

$$W_p(z) = \frac{\sum_{i=0}^M \mu_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N \nu_j \cdot z^{-j}}. \quad (4)$$

Числитель выражения (4) соответствует значениям сигнала на входе регулятора в дискретные моменты времени $0 \cdot T, 1 \cdot T, 2 \cdot T, \dots$. Знаменатель выражения (4) соответствует сигналам на выходе регулятора в дискретные моменты времени $1 \cdot T, 2 \cdot T, \dots$.

В результате из (2) и (3) получим выражение для дискретной передаточной функции регулятора $W_p(z)$:

$$W_p(z) = \left(\frac{k_d + \tau_d}{T} + k_d + \tau_d \right) \cdot z^0 - \left(\frac{k_d + \tau_d}{T} \right) \cdot z^{-1} = \mu_0 \cdot z^0 + \mu_1 \cdot z^{-1}. \quad (5)$$

С учетом того, что в выражении (5) отсутствует знаменатель, слагаемые в числителе соответствуют текущему ($\mu_0 \cdot z^0$) и предыдущему ($\mu_1 \cdot z^{-1}$) значениям входного сигнала.

На входе цифрового регулятора обычно находится аналого-цифровой преобразователь с передаточной функцией h_1 , а на выходе – цифро-аналоговый преобразователь с передаточной функцией h_2 . Поэтому выражение для выходного сигнала регулятора $X[nT]$ принимает вид

$$X[nT] = \mu_0 \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot F[nT] + \mu_1 \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot F[(n-1)T], \quad (5)$$

где $F[nT] = f[nT]/h_1$ – входной сигнал регулятора в текущий момент дискретного времени, полученный после аналого-цифрового преобразования;

$F[(n - 1)T] = f(n - 1)T/h_1$ – входной сигнал регулятора в предыдущий момент дискретного времени, полученный после аналого-цифрового преобразования.

В проектируемом регуляторе отсутствует необходимость в аналого-цифровом преобразовании, поэтому выражение, описывающее работу цифрового регулятора в дискретном времени, будет иметь вид

$$X[nT] = \frac{\mu_0}{h_2} \cdot F[nT] + \frac{\mu_1}{h_2} \cdot F[(n-1)T]. \quad (6)$$

Объект управления является непрерывным звеном, поэтому значение $X[nT]$ в цифровой форме должно быть преобразовано в значение в аналоговой форме $x[nT]$ в соответствии с выражением

$$x[nT] = h_2 \cdot X[nT]. \quad (7)$$

где h_2 – передаточная функция ЦАП, В.

Поскольку отсутствует необходимость в аналого-цифровом преобразовании, выражение, описывающее сигнал $x[nT]$ на выходе цифрового регулятора в дискретном времени, будет иметь вид

$$x[nT] = \mu_0 \cdot F[nT] + \mu_1 \cdot F[(n-1)T]. \quad (8)$$

После подстановки полученных в результате экспериментов значений в выражение (5) и с учетом (8), а также выбранного значения $T = 6$ мс получим, что

$$x[nT] = 6,5 \cdot f[nT] - 5 \cdot f[(n-1)T], \quad (9)$$

причем значение $x[nT]$ должно находиться в диапазоне от $-10,24$ до $10,23$.

Объект управления представляет собой непрерывное звено, поэтому для моделирования его «поведения» в составе дискретной системы регулирования необходимо получить передаточную функцию $W_{Oy}(z)$, представив ее в каноническом виде

$$W_{Oy}(z) = \frac{\sum_{i=1}^K \psi_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^L \varphi_j \cdot z^{-j}}. \quad (10)$$

На выходе цифрового регулятора присутствует экстраполиатор нулевого порядка, запаздывание существенно меньше периода дискретизации, поэтому для получения выражения $W_{Oy}(z)$ в каноническом виде воспользуемся выражением [3]

$$W_{oy}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left(\frac{W_{oy}(p)}{p} \right) \right\}, \quad (11)$$

где Z – оператор дискретного z -преобразования; L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа.

Выполнив в выражении (10) преобразования, получим, что

$$W_{oy}(z) = \frac{\Psi_1 \cdot z^0}{1 + \Phi_1 \cdot z^{-1}}. \quad (12)$$

После подстановки полученных в результате экспериментов значений в выражение (11), а также выбранного значения $T = 6$ мс, получим, что

$$y[nT] = 0,1 \cdot x[nT] + 1,001 \cdot y[(n-1)T]. \quad (13)$$

Для моделирования будем использовать выражения (9) и (13), а также выражение (см. рис. 1)

$$f[nT] = g[nT] - f[nT]. \quad (14)$$

Расчеты выполняются в следующем порядке:

- обнуляются все текущие и предыдущие значения $f[nT]$, $x[nT]$, $y[nT]$, а значению $g[nT]$ присваивается значение 1, n присваивается значение 0;

- вычисляется значение $y[nT]$ по выражению (13);
- вычисляется значение $f[nT]$ по выражению (14);
- вычисляется значение $x[nT]$ по выражению (9).

Далее процесс вычисления повторяется в точке $n = 1$ и т. д. Для расчета можно задать несколько десятков точек, но целесообразно сначала выполнить предварительный расчет длительности переходного процесса $t_{пер}$ в предположении, что $t_{пер} = 3 \cdot \tau$, где τ – постоянная времени объекта управления, для рассматриваемого объекта $\tau = 40$ мс = 0,04 с.

После несложных вычислений можно получить, что расчет нужно проводить для времени в диапазоне от 0 до 120 мс, что при $T = 6$ мс соответствует 20 периодам дискретизации. В теории управления критерием окончания переходного процесса при возрастании значения некоторой величины считается достижение ей величины 0,95 от максимального значения.

После получения расчетных данных оказалось, что переходный процесс заканчивается при достижении времени 0,156 с.

Для получения более точных сведений выполним расчет для времени от 0 до 0,3 с, что отражено в зависимости, приведенной на рис. 2.

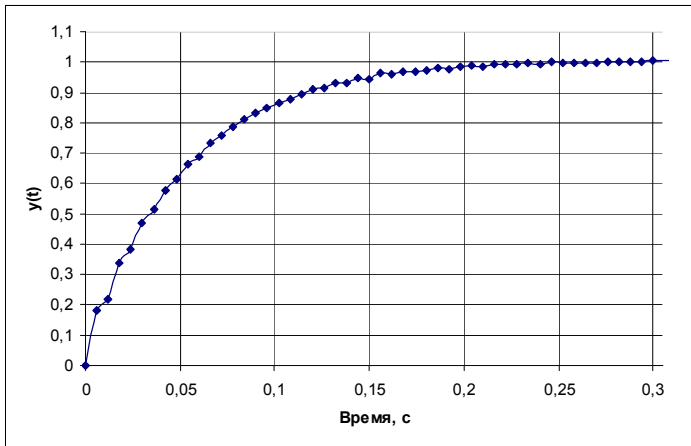


Рис. 2. Зависимость выходного сигнала $y(t)$ от времени t при единичном ступенчатом входном воздействии $g(t)$

Результаты экспериментов показали правильность выбора параметров математической модели.

В процессе математического моделирования системы регулирования положения электронного луча были получены результаты, позволяющие осуществить практическую реализацию системы в виде аппаратной и программной части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шиллер З. Электронно-лучевая технология: пер. с нем. / З. Шиллер, У. Гайзиг, З. Панцер. М.: Энергия, 1980. 528 с.
2. Гусаров А.В. Математическое моделирование датчика положения электронного луча // Неделя науки – 2023: материалы Всероссийской научно-практической конференции (г. Сибай. Республика Башкортостан, 6–7 апреля 2023 г.). Сибай: Сибайский институт (филиал) УУНиТ, 2023. С. 217–220.
3. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, Гл. редакция физико-математической литературы, 1976. 576 с.

УДК 004.032.26

А. И. Иванов¹, В. А. Антошкин²

¹Рязанский государственный медицинский университет
им. академика И.П. Павлова

Россия, г. Рязань, e-mail: a.ivanov.rsmu@mail.ru

²Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина

Россия, г. Рязань, e-mail: v.antoshkin@rsu.edu.ru

ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОСЕТИ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ ИГРЫ BLOCK REVOLUTION

В статье рассмотрен принцип обучения нейронной сети с подкреплением для игры Block Revolution. Были разработаны нейросеть и сама компьютерная игра на языке программирования Python. Полученный метод основывается на применении однослойного перцептрона и позволяет автоматизировать прохождение игры за конечное время.

Ключевые слова: нейронная сеть, обучение с подкреплением, компьютерные игры, Block Revolution, Python

A. I. Ivanov¹, V. A. Antoshkin²

¹I.P. Pavlov Ryazan State Medical University
Russia, Ryazan, e-mail: a.ivanov.rsmu@mail.ru

²S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: v.antoshkin@rsu.edu.ru

REINFORCEMENT LEARNING USING NEURAL NETWORK FOR THE GAME «BLOCK REVOLUTION»

The article discusses the principle of reinforcement learning using neural network for the game «Block Revolution». The neural network and the computer game itself were developed in the Python programming language. The resulting method is based on the use of a single-layer perceptron and makes it possible to automate the completion of the game in a finite time.

Keywords: neural network, reinforcement learning, computer games, Block Revolution, Python

В настоящий момент времени машинное обучение очень популярно. Его методы внедряются во многих областях науки и техники, поскольку позволяют автоматизировать некоторые процессы с помощью эмпирического поиска решения на основе анализа большого количества схожих задач.

Одной из областей, в которых применяется машинное обучение, является сфера компьютерных игр. Для расширения возможностей игрового

искусственного интеллекта объекты можно заранее научить необходимому поведению, а затем использовать полученную модель [1].

Для выполнения игровыми объектами определенных действий применима нейронная сеть [2]. В данной работе она обучается с подкреплением на основе игры Block Revolution (рис. 1), разработанной с помощью языка Python. Она является клоном известной игры Breakout, которая была создана компанией Atari в 1976 году. Цель игры заключается в уничтожении всех кирпичей с помощью управляемой ракетки.



Рис. 1. Интерфейс игры Block Revolution

Нейронная сеть создана с помощью собственной библиотеки, также написанной на языке Python [3]. Для обучения игры использовалась нейросеть, имеющая архитектуру однослойного перцептрона с топологией (2, 1) (рис. 2). На первый входной нейрон подается относительная координата x центра шарика, на второй – относительная координата x центра ракетки. Единственный выходной нейрон рассчитывает направление движения ракетки. Это реализуется путем применения функции $\text{sign}(x)$ в качестве активационной. Она определяет знак числа, получившегося на выходе сумматора.

Обучение нейросети состоит из этапов, на каждом из которых создаются 5 ракеток с нейросетями, наследующими веса от «лучшей ракетки» предыдущего этапа с максимальным числом уничтоженных кирпичей. Однако веса ракеток нового поколения не только копируются от лучшей [4], но и ещё обучаются с помощью генетического алгоритма. В данном случае используется оператор мутации [5], позволяющий модифицировать веса с вероятностью 40%. Такой параметр является наилучшим и был рассчитан в ходе исследования алгоритма. Мутация весов позволяет добавить вариативности нейросетям и повысить вероятность нахождения правильного решения.

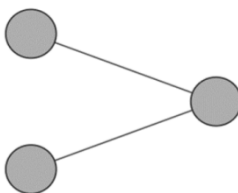


Рис. 2. Топология применяемой нейросети

На каждом этапе все описанные действия повторяются. Если будут уничтожены все кирпичи, то обучение завершается с сохранением модели сети.

В результате работы была обучена игра Block Revolution. Используемая методика позволила автоматизировать ее прохождение с помощью обучения нейросетей с подкреплением и генетического алгоритма. Преимущество данного метода состоит в том, что нейросеть имеет простую архитектуру (однослойный перцептрон) и топологию (2, 1). Это позволило ускорить процесс обучения, а также улучшить его понимание. Кроме того, достигнута достаточно высокая интеллектуальность сети, поскольку входными данными являются только координаты шарика и ракетки, а все вычисления и нахождение зависимостей выполняет нейросеть (её единственный нейрон выходного слоя). Применение описанных действий обеспечило завершение процесса за конечное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубенко К.И. Возможное применение нейронных сетей в играх в будущем // Наука, образование и культура. 2018. № 10 (34). С. 12-13.
2. Arulkumaran K. Alpha Star: An Evolutionary Computation Perspective / K. Arulkumaran, A. Cully, J. Togelius // GECCO '19: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion, 2019. P. 314-315.
3. Антошкин В.А. Методика обучения нейросетей с подкреплением на основе игры «Птица в клетке» // Информатика и прикладная математика. 2022. №28. С. 9-12.
4. Антошкин В.А. Обучение нейронной сети с подкреплением для компьютерной игры «Динозавр T-Rex» / В.А. Антошкин, С.И. Морозова // Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования: Материалы IV Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых. Краснодар: ФГБУ «Российское энергетическое агентство» Минэнерго России Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2022. С. 296-300.
5. Шумков Е.А. Использование генетических алгоритмов для обучения нейронных сетей // Научный журнал КубГАУ. 2013. № 91 (07). С. 455-464.

УДК 51-77:330.4

Е. Ю. Лискина, И. А. Силантьева

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: katelis@yandex.ru, irinasilantevais@yandex.ru

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХФАКТОРНОЙ
ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА ТРУДА
С МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ
ФУНКЦИЕЙ**

Рассмотрена динамическая модель рынка труда, описывающая динамику стоимости основных фондов, численности населения, рабочей силы и занятых в экономике, учитывающая постоянные инвестиции и постоянную миграцию. Найдены особые точки динамической системы, определены условия существования положительных состояний равновесия.

Ключевые слова: рынок труда, динамическая модель, динамическая система, положение равновесия

E. Y. Liskina, I. A. Silantyeva

S.A. Esenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: katelis@yandex.ru, irinasilantevais@yandex.ru

**THE STUDY OF A FOUR-FACTOR
DYNAMIC MODEL OF THE LABOR MARKET
WITH A MULTIPLICATIVE PRODUCTION FUNCTION**

A dynamic model of the labor market is considered, describing the dynamics of the cost of fixed assets, population, labor force and employed in the economy, considering constant investments and constant migration. The singular points of the dynamical system are found, the conditions for the existence of positive equilibrium states are determined.

Keywords: labor market, dynamic model, dynamical system, equilibrium

Введение. В работе [1] предложена четырехфакторная динамическая модель рынка труда, учитывающая постоянные инвестиции и миграцию

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)F(K, L) + I, \\ \dot{L} = r_L Q \left(1 - \frac{Q}{M_L}\right), \\ \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N+P}{M}\right), \\ \dot{Q} = \gamma_1 N + \gamma_2 F(K, L) + \gamma_3 P, \end{cases} \quad (1)$$

в которой K – капитал (стоимость основных фондов экономики); L – труд (численность населения, занятого в экономике); N – численность населения, постоянно проживающего в регионе; Q – численность рабочей силы; $F(K, L)$ – производственная функция; $(1-a) \in [0; 1)$ – коэффициент накопления основного капитала); $\mu \in (0; 1)$ – норма амортизации; M_L и M – максимально допустимые численности рабочих мест и населения соответственно ($M > N + P$, $M_L > L$); $\{r_L, r\} \in (-1; 1)$ – коэффициенты прироста рабочих мест и населения соответственно; I – постоянные внешние инвестиции; P – миграционное сальдо (может быть как положительной, так и отрицательной величиной); $\{\gamma_1, \gamma_2\} \in (-1, 1)$; $\gamma_3 \in [0; 1)$ – коэффициент прироста (убыли) рабочей силы за счет миграции. В работе [1] использовалась мультипликативная производственная функция вида $F(K, L) = a_0 K L$, которая не является вогнутой. В данной работе рассмотрим модель (1) с неоклассической производственной функцией вида $F(K, L) = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$, $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in (0; 1)$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, $\alpha_0 > 0$ – коэффициент нейтрального технического прогресса. С учетом её система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)\alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} + I, \\ \dot{L} = r_L Q \left(1 - \frac{Q}{M_L}\right), \\ \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N+P}{M}\right), \\ \dot{Q} = \gamma_1 N + \gamma_2 \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} + \gamma_3 P. \end{cases} \quad (2)$$

Ставится задача: найти состояния равновесия системы (2), исследовать поведение траекторий в окрестности состояний равновесия методами качественной теории дифференциальных уравнений [2].

Исследование модели. Из условий $\dot{K} = \dot{L} = \dot{N} = \dot{Q} = 0$ для системы (2) были получены состояния равновесия $O_1(K_1; L_1; 0; 0)$, $O_2(K_1; L_1; 0; M_L)$, $O_3(K_2; L_2; M - P; 0)$, $O_4(K_2; L_2; M - P; M_L)$, где

$$K_1 = \frac{I\gamma_2 - (1-a)\gamma_3 P}{\mu\gamma_2}, \quad L_1 = \left(-\frac{\gamma_3 P}{\gamma_2 \alpha_0} \left(\frac{\mu\gamma_2}{I\gamma_2 - (1-a)\gamma_3 P} \right)^{\alpha_1} \right)^{1/\alpha_2}, \quad (3)$$

$$K_2 = \frac{I\gamma_2 - (1-a)(\gamma_1(M-P) + \gamma_3 P)}{\mu\gamma_2},$$

$$L_2 = \left(-\frac{\gamma_1(M-P) + \gamma_3 P}{\gamma_2 \alpha_0} \left(\frac{\mu\gamma_2}{I\gamma_2 - (1-a)(\gamma_1(M-P) + \gamma_3 P)} \right)^{\alpha_1} \right)^{1/\alpha_2}. \quad (4)$$

Так как система (2) представляет модель формальной экономики только при условии существования положительных состояний равновесия O_1, O_2, O_3, O_4 , то необходимо установить соотношения между постоянными внешними инвестициями I , миграционным сальдо P и коэффициентами системы (2), определяющими положительные состояния равновесия. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для того чтобы имели место неравенства $K_1 > 0$ и $L_1 > 0$, необходимо и достаточно неравенства $P\gamma_2 < 0$.

Доказательство. В силу предположений о коэффициентах и внешних факторах системы (1) в формуле для K_1 в (3) отрицательными могут быть миграционное сальдо P и коэффициент γ_2 . Поэтому отношение $\frac{P}{\gamma_2}$, входящее в выражения (3), может быть как положительным, так и отрицательным. Очевидно, что $K_1 > 0$ тогда и только тогда, когда $I \geq \frac{(1-a)\gamma_3 P}{\gamma_2}$, что возможно, как при $P\gamma_2 < 0$, так и при $P\gamma_2 > 0$. Значение L_1 определено тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $\frac{\gamma_3 P}{\gamma_2 \alpha_0} < 0$ и $\frac{\mu\gamma_2}{I\gamma_2 - (1-a)\gamma_3 P} > 0$, первое из которых справедливо только при $P\gamma_2 < 0$, а второе определяется положительностью K_1 . Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Для того чтобы имели место неравенства $K_2 > 0$ и $L_2 > 0$, необходимо и достаточно выполнения одного (любого) из четырех условий:

- 1) $\gamma_1 > 0, \gamma_2 < 0, P > 0$;
- 2) $\gamma_1 < 0, \gamma_2 > 0, P > 0, |\gamma_1|(M-P) > \gamma_3 P$;
- 3) $\gamma_1 < 0, \gamma_2 > 0, P < 0$;
- 4) $\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0, P < 0, \gamma_1(M-P) > \gamma_3 |P|$.

Доказательство. В силу предположений о коэффициентах и внешних факторах системы (1) в формуле для K_2 в (4) отрицательными могут быть миграционное сальдо P и коэффициенты γ_1, γ_2 . Аналогично утверждению 1 доказывается, что для $K_2 > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$I > \frac{(1-a)(\gamma_1(M-P)+\gamma_3P)}{\gamma_2}.$$

Для положительности $L_2 > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{(\gamma_1(M-P)+\gamma_3P)}{\gamma_2\alpha_0} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\mu\gamma_2}{I\gamma_2-(1-a)(\gamma_1(M-P)+\gamma_3P)} > 0,$$

второе из которых следует из $K_2 > 0$, а первое не противоречит неравенству

$$I > \frac{(1-a)(\gamma_1(M-P)+\gamma_3P)}{\gamma_2}.$$

В свою очередь неравенство $\frac{(\gamma_1(M-P)+\gamma_3P)}{\gamma_2\alpha_0} < 0$ справедливо при выполнении любого из четырех условий 1)–4), указанных в формулировке утверждения 2.

Утверждение 2 доказано.

Заметим, что при выполнении условий 1) или 3) утверждения 2 система (2) имеет четыре положительных состояния равновесия, а при выполнении условий 2) или 4) – только два (O_3 и O_4). Далее исследуем поведение траекторий системы (2) в окрестности каждого состояния равновесия с использованием свойств соответствующей системы линейного приближения [2].

Матрица системы линейного приближения в состоянии равновесия O_k ($k = \bar{1}; 4$) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\mu+(1-a)\alpha_0\alpha_1K_j^{\alpha_1-1}L_j^{\alpha_2} & (1-a)\alpha_0\alpha_2K_j^{\alpha_1}L_j^{\alpha_2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_L - \frac{2r_L Q^*}{M_L} \\ 0 & 0 & r\left(1 - \frac{P}{M}\right) - \frac{2rN^*}{M} & 0 \\ \gamma_2\alpha_0\alpha_1K_j^{\alpha_1-1}L_j^{\alpha_2} & \gamma_2\alpha_0\alpha_2K_j^{\alpha_1}L_j^{\alpha_2-1} & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$j = \overline{1, 2}$, $N^* \in \{0; M - P\}$, $Q^* \in \{0; M_L\}$.

Собственные значения матрицы (5) в особой точке O_1 равны соответственно

$$\begin{aligned} \lambda_1(O_1) &= -\left(\mu + \frac{(1-a)\alpha_0\alpha_1\gamma_3P}{\gamma_2K_1}\right), \\ \lambda_2(O_1) &= -\alpha_2\gamma_3PK_1^{\alpha_1/\alpha_2} \left(-\frac{\alpha_0\gamma_2}{\gamma_3P}\right)^{1/\alpha_2} \frac{\mu\gamma_2K_1 + (\alpha_0+1)(1-a)\alpha_1\gamma_3P}{\mu\gamma_2K_1 + (1-a)\alpha_0\alpha_1\gamma_3P}, \\ \lambda_3(O_1) &= r\left(1 - \frac{P}{M}\right), \quad \lambda_4(O_1) = r_L. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы (5) в особой точке O_2 равны соответственно

$$\begin{aligned} \lambda_1(O_2) &= -\left(\mu + \frac{(1-a)\alpha_0\alpha_1\gamma_3P}{\gamma_2K_1}\right), \\ \lambda_2(O_2) &= -\alpha_2\gamma_3PK_1^{\alpha_1/\alpha_2} \left(-\frac{\alpha_0\gamma_2}{\gamma_3P}\right)^{1/\alpha_2} \frac{\mu\gamma_2K_1 + (\alpha_0+1)(1-a)\alpha_1\gamma_3P}{\mu\gamma_2K_1 + (1-a)\alpha_0\alpha_1\gamma_3P}, \\ \lambda_3(O_2) &= r\left(1 - \frac{P}{M}\right), \quad \lambda_4(O_2) = -r_L. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы (5) в особой точке O_3 равны соответственно

$$\begin{aligned} \lambda_1(O_3) &= -\left(\mu + \frac{(1-a)\alpha_1(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)}{\gamma_2K_2}\right), \\ \lambda_2(O_3) &= -\alpha_2K_2^{\alpha_1/\alpha_2} \left(-\frac{\alpha_0\gamma_2}{(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)}\right)^{1/\alpha_2} \frac{(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)\mu\gamma_2K_2}{\mu\gamma_2K_2 + (1-a)\alpha_1(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)}, \\ \lambda_3(O_3) &= -r\left(1 - \frac{P}{M}\right), \quad \lambda_4(O_3) = r_L. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы (5) в особой точке O_4 равны соответственно

$$\begin{aligned} \lambda_1(O_4) &= -\left(\mu + \frac{(1-a)\alpha_1(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)}{\gamma_2K_2}\right), \\ \lambda_2(O_4) &= -\alpha_2K_2^{\alpha_1/\alpha_2} \left(-\frac{\alpha_0\gamma_2}{(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)}\right)^{1/\alpha_2} \frac{(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)\mu\gamma_2K_2}{\mu\gamma_2K_2 + (1-a)\alpha_1(\gamma_1(M-P) + \gamma_3P)}, \\ \lambda_3(O_4) &= -r\left(1 - \frac{P}{M}\right), \quad \lambda_4(O_4) = -r_L. \end{aligned}$$

Заметим, что для всех особых точек собственные значения соответствующих матриц систем линейного приближения действительны и различны. В этом случае устойчивость и асимптотическая устойчивость особых точек определяются однозначно по знакам собственных значений. С точки зрения экономики наиболее привлекательным является состояние равновесия O_4 , так как оно характеризует экономику с ненулевой численностью населения и с ненулевой численностью рабочей силы, проживающей в этом регионе.

Пример. Пусть система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{K} = -0,1K + (1-0,6)0,2K^{0,5}L^{0,6} + 50, \\ \dot{L} = 0,1Q\left(1-\frac{Q}{10}\right), \\ \dot{N} = 0,7N\left(1-\frac{N-7}{20}\right), \\ \dot{Q} = -0,5N + 0,30,2K^{0,5}L^{0,6} - 0,04 \cdot 0,7. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда состояния равновесия

$$O_1(503,73; 0,07; 0; 0), \quad O_2(503,73; 0,07; 0; 10), \\ O_3(683,73; 37,39; 27; 0), \quad O_4(683,73; 37,39; 27; 10).$$

Собственные значения матриц соответствующих систем линейного приближения в окрестности особых точек следующие:

$$O_1 : \{-0,0996; 2,3112; 0,0945; 0,1000\}, \\ O_2 : \{-0,0996; 2,3112; 0,0945; -0,1000\}, \\ O_3 : \{-0,0866; 0,2551; -0,0945; 0,1000\}, \\ O_4 : \{-0,0866; 0,2551; -0,0945; -0,1000\}.$$

Таким образом, для всех особых точек системы (6) собственные значения матриц соответствующих систем линейного приближения имеют разные знаки, следовательно, состояния равновесия не являются устойчивыми. Производственная функция представлена на рис. 1, поведение фазовой траектории системы (6) в окрестности особой точки O_2 в координатах $OKLN$ и $OLNQ$ представлены на рис. 2 и 3 соответственно

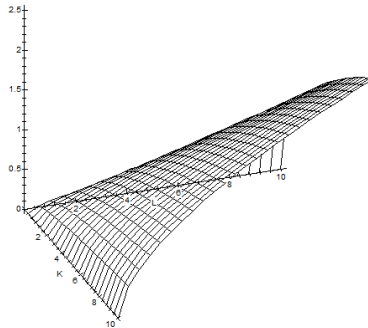


Рис. 1. График неоклассической производственной функции

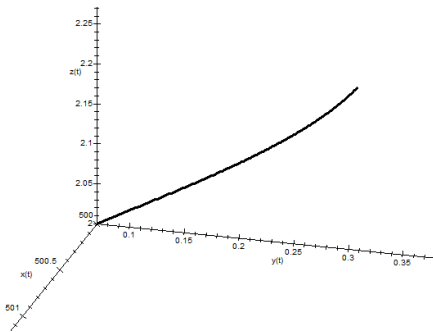


Рис. 2. Фазовая траектория системы (6) в окрестности особой точки O_2 в координатах $OKLN$

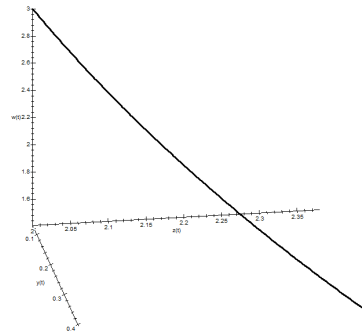


Рис. 3. Фазовая траектория системы (6) в окрестности особой точки O_2 в координатах $OLNQ$

Заключение. В дальнейшем предполагается получить коэффициентные условия устойчивости положительного состояния равновесия O_4 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лискина Е.Ю. Исследование равновесных траекторий неавтономной динамической модели рынка труда / Е.Ю. Лискина, И.А. Силантьева // Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии: материалы IX Междунар. науч.-прак. конф. Елец: Елецкий гос. ун-т им. И.А. Бунина, 2023. С. 84–88.
2. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. М.: Наука, 1991. 486 с.

УДК 544.35.03

В. В. Макарьин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vfak@yandex.ru

РАСЧЕТ ПЛОТНОСТИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ЭТИЛОВОГО СПИРТА

Предложена эффективная модель оценки и расчета плотности водных растворов этилового спирта на основе «моногидратного» подхода. Определена константа равновесия предполагаемой реакции и плотность моногидрата. Погрешность расчета составляет менее 1%.

Ключевые слова: этиловый спирт, вода, раствор, плотность, ассоциат, моногидрат, равновесие

V. V. Makaryin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vfak@yandex.ru

DENSITY'S CALCULATION OF ETHYL SPIRIT WATER SOLUTIONS

The effective model of an estimation and calculation of density of ethyl spirit water solutions on a basis "monohydrate" the approach is offered. The error of calculation makes less than 1 %.

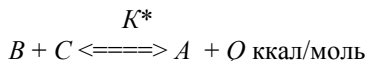
Keywords: ethyl spirit, water, solution, density, monohydrate, associate, balance

Ввиду широкого применения этилового спирта в различных отраслях промышленности, таких как химическая и пищевая, представляет интерес оценка величины плотности водных растворов этанола, которая часто используется для определения крепости спиртных напитков. Плотность можно найти, например, в справочнике [1]. Но это не всегда удобно, а в некоторых случаях и не всегда доступно при его отсутствии. При промежуточных значениях необходимо вычислять плотность по экстраполяционным формулам, приведенным в справочнике, что, конечно, уменьшает точность оценки.

В данной работе предлагается подход, основанный на химическом взаимодействии воды и спирта с образованием виртуального компонента

(моногидрата) [1]. Подтверждением протекания реакции между спиртом и водой служит факт уменьшения общего объема смеси и выделения тепла.

Предположим, что при смешении чистых компонентов B (воды) и C (спирта) в результате обратимой химической реакции



образуется компонент A , назовем его ассоциатом, или моногидратом. Здесь K^* – константа равновесия.

Обозначим количество равновесных молей компонентов:

$$B^* = B_0 - A^*, \quad C^* = C_0 - A^*,$$

где B_0, C_0 – начальные количества (молей) компонентов B и C , $B_0 = 100 \cdot X_b / Mmb$, $C_0 = 100 \cdot X_c / Mmc$; X_b, X_c – исходные массовые доли воды и спирта; Mmb и Mmc – молекулярные массы воды и спирта; A^* – равновесное количество молей ассоциата.

Для определенности возьмем массу раствора $M = 100$ г.

Из закона действия масс

$$\frac{(B_0 - A^*)(C_0 - A^*)}{V_{\text{ж}} \cdot V_{\text{ж}}} = \frac{K^* \cdot A^*}{V_{\text{ж}}}, \quad (1)$$

где $V_{\text{ж}}$ – объем смеси. Следовательно,

$$(B_0 - A^*)(C_0 - A^*) = K^* \cdot A^* \cdot V_{\text{ж}}. \quad (2)$$

Расчетную плотность смеси $\rho_{\text{см}}$ можно представить соотношением $\rho_{\text{см}} = M/V_{\text{ж}}$, где M – масса раствора, а

$$V_{\text{ж}} = \frac{(B_0 - A^*) \cdot Mmb}{\rho_b} + \frac{(C_0 - A^*) \cdot Mmc}{\rho_c} + \frac{A^* \cdot Mma}{\rho_a}. \quad (3)$$

Здесь Mma – молекулярная масса ассоциата; ρ_a, ρ_b, ρ_c – плотности компонентов.

Подставив в формулу (2) выражение для объема жидкости (3) и перегруппировав элементы с A^* , получим квадратное уравнение

$$a(A^*)^2 + bA^* + c = 0,$$

где

$$a = 1 - \frac{K^* \cdot Mma}{\rho_a} + \frac{K^* \cdot Mmb}{\rho_b} + \frac{K^* \cdot Mmc}{\rho_c},$$

$$b = - \left(\frac{K^* \cdot B_0 \cdot Mmb}{\rho_b} + \frac{K^* \cdot C_0 \cdot Mmc}{\rho_c} + B_0 + C_0 \right), \quad c = B_0 \cdot C_0.$$

Как известно, общее решение квадратного уравнения для A^* записывается в виде

$$A^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В этой формуле выбираем знак (-), потому что равновесная концентрация компонента A^* не должна быть больше суммы начальных значений $B_0 + C_0$, то есть

$$A^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В правую часть этого равенства входят константа равновесия K^* и плотность ассоциата ρ_a . Их можно подобрать путем аппроксимации при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^n ({}^T \rho_i^{cm} - {}^P \rho_i^{cm})^2 \rightarrow \min, \quad (4)$$

где ${}^T \rho_i^{cm}$ и ${}^P \rho_i^{cm}$ – табличные и расчетные плотности спиртовой смеси.

Расчетную плотность смеси выразим следующим образом:

$${}^P \rho_i^{cm} = M / V_{жс},$$

где M – где масса раствора, или в развернутом виде через равновесные моли:

$${}^P \rho_i^{cm} = \frac{K^* A^* M}{(B_0 - A^*)(C_0 - A^*)}. \quad (5)$$

На основе табличных данных плотностей, взятых из справочника [1], были определены константы равновесия K^* для различных температур. По этим данным получена приближенная формула для зависимости константы равновесия от температуры в виде квадратичной функции:

$$K^* = 6,648 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot t + 3,613 \cdot 10^{-2}. \quad (6)$$

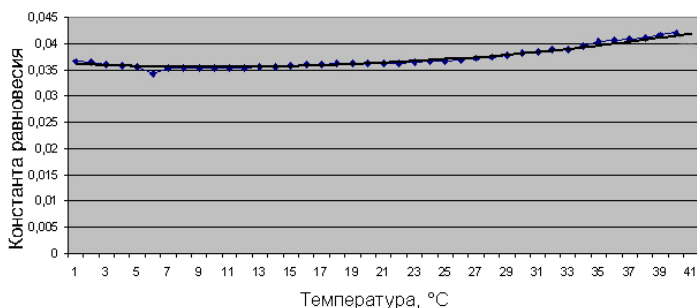


Рис. 1. Зависимость константы равновесия от температуры

Минимум константы достигается при равенстве производной dK^*/dt нулю: $2 \cdot 6,648 \cdot 10^{-6} \cdot t - 1,333 \cdot 10^{-4} = 0$, т.е. при $t = 10,02$ °C. При этой температуре уменьшение объема раствора будет минимальным.

Равновесные моли ассоциата A^* также хорошо подчиняются квадратичной зависимости (рис. 2 и табл. 1).

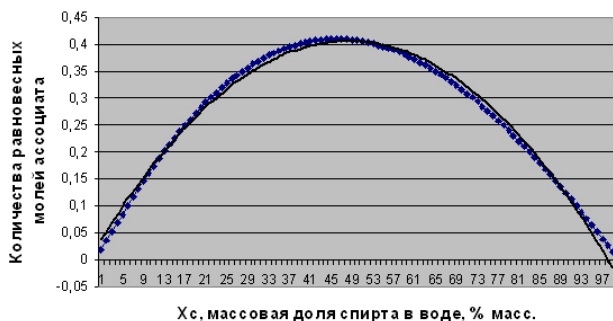


Рис. 2. Зависимость количества равновесных молей ассоциата от массового содержания спирта в воде при $t = 20$ °C

На основе полученных величин K^* и A^* были рассчитаны плотности растворов спирта и плотности ρ_a виртуального компонента A в диапазоне температур от 0 до 40 °C. Погрешность расчета составила менее 1%. Уравнение, описывающее значения плотности компонента A от температуры, получилось следующим:

$$\rho_a = -0,00586 t + 0,995 \text{ г/см}^3.$$

Таблица 1. Уравнения, связывающие количество молей ассоциата для 100 г. раствора с массовой долей этанола (x) в % мас. при различной температуре

Температура, °С	Уравнения
0	$A^* = -0,000164x^2 + 0,0159x + 0,0234$
5	$A^* = -0,000166x^2 + 0,0160x + 0,0240$
10	$A^* = -0,000167x^2 + 0,0161x + 0,0241$
15	$A^* = -0,000165x^2 + 0,0160x + 0,0231$
20	$A^* = -0,000164x^2 + 0,0159x + 0,0225$
25	$A^* = -0,000162x^2 + 0,0157x + 0,0214$
30	$A^* = -0,000158x^2 + 0,0153x + 0,0195$
35	$A^* = -0,000152x^2 + 0,0148x + 0,0173$
40	$A^* = -0,000156x^2 + 0,0151x + 0,0185$
Среднее	$A^* = -0,000162x^2 + 0,0156x + 0,0215$

Проведем несколько расчетов по полученным зависимостям.

Пример 1. Рассчитать плотность раствора и его объем при смешении 500 г 100% мас. этанола и 500 г воды при 20 °С.

а) Находим константу равновесия по уравнению (6)

$$K^* = 6,648 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot t + 3,613 \cdot 10^{-2} = 6,648 \cdot 10^{-06} \cdot 20^2 - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot 20 + 3,613 \cdot 10^{-2} = 0,0361.$$

б) Находим количество образовавшихся равновесных молей A^* для 100 г, содержащих 50% мас. этанола:

$$A^* = -0,000164 \cdot x^2 + 0,0159 \cdot x + 0,0225 = -0,000164 \cdot 50^2 + 0,0159 \cdot 50 + 0,0225 = 0,4075 \text{ мол.}$$

Расчетная плотность смеси 50% мас. раствора этанола находится по формуле (5):

$$\rho_{см}^p = (0,0361 \cdot 0,4075 \cdot 100) / ((50/18,015 - 0,4075) \cdot (50/46,069 - 0,4075)) = 0,9165 \text{ г/см}^3.$$

Табличная плотность – 0,9138 г/см³. Относительная погрешность расчета составляет $\delta = (0,9138 - 0,9165) / 0,9138 = -0,0029$, т.е. менее 1%.

Вычислим объем жидкости (смеси) для 1000 г:

$$V_{ж} = M / \rho_{см}^p = 1000 / 0,9165 = 1091,1 \text{ см}^3.$$

Начальный объем смеси равен сумме объемов воды и спирта:

$$V_0 = V_c + V_b = 500 / \rho_c + 500 / \rho_b = 500 / 0,78927 + 500 / 0,99823 = 633,5 + 500,89 = 1134,4 \text{ см}^3.$$

Уменьшение объема ΔV составит

$$\Delta V = V_0 - V_{ж} = 1134,4 - 1091,1 = 43,3 \text{ см}^3.$$

Объемное содержание спирта при этом равно

$$V_c/V_{ж} = (500/\rho_c)/V_{ж} = (500/0,78927)/1091,1 = 58,06\% \text{ об.}$$

Пример 2. Рассчитать плотность 95% об. раствора этанола при 20 °С.

Для определенности возьмем 100 см³ раствора. Объем жидкости после реакции смешения будет составлять $V_{ж} = V_a + V_b + V_c = 100 \text{ см}^3$.

Из соотношения (2) найдем оставшееся количество молей воды:

$$(B_0 - A^*) = \frac{K^* \cdot A^* \cdot V_{ж}}{(C_0 - A^*)},$$

подставим его в выражение (2) и приведем к общему знаменателю. Получится следующее квадратное уравнение:

$$(Mmc \cdot \rho_a \rho_b - Mma \cdot \rho_b \rho_c) \cdot (A^*)^2 + (K^* \cdot V_{ж} \cdot Mmb \cdot \rho_a \rho_c - C_0 \cdot (2 \cdot Mmc \cdot \rho_a \rho_b - Mma \cdot \rho_b \rho_c) + V_{ж} \cdot \rho_a \rho_b \rho_c) \cdot A^* + C_0 \cdot \rho_a \rho_b \cdot (C_0 \cdot Mmc - V_{ж} \cdot \rho_c) = 0. \quad (7)$$

Решая это уравнение, находим равновесное количество молей компонента A^* . Оно получилось равным $A^* = 0,098$ мол. Начальное количество воды $B_0 = 0,33144$ мол., или 5,98 см³, объем этанола 95 см³. Отсюда расчетная плотность 95% об. раствора этанола составит

$$\rho_{см} = M/V_{ж} = (V_b \cdot \rho_b + V_c \cdot \rho_c)/100 = (5,98 \cdot 0,99823 + 95,0 \cdot 0,78927)/100 = 0,8095 \text{ г/см}^3.$$

Табличное значение плотности $\rho_{см}^T = 0,8144 \text{ г/см}^3$, точность

$\delta = (0,8144 - 0,8095)/0,8144 = 0,006$, что составляет меньше 1%.

Массовое содержание 95% об. раствора этанола будет

$$x_c = V_c \cdot \rho_c / (V_b \cdot \rho_b + V_c \cdot \rho_c) = 92,63\% \text{ мас.}$$

Чтобы не решать каждый раз громоздкое квадратное уравнение (7), можно воспользоваться достаточно удовлетворительной линейной аппроксимацией из табл. 2.

Таблица 2. Уравнения, связывающие исходный объем воды (y) для 100 см³ раствора с объемной долей этанола (x , об. %) при различной температуре

Температура, °С	$y = -0,986x + 102,15$
0	$y = -0,987x + 102,00$
5	$y = -0,987x + 102,00$
10	$y = -0,987x + 101,96$
15	$y = -0,987x + 101,93$
20	$y = -0,988x + 101,89$
25	$y = -0,988x + 101,87$
30	$y = -0,989x + 101,84$
35	$y = -0,989x + 101,81$
40	$y = -0,9876x + 101,94$
Среднее	$y = -0,9876x + 101,94$

Пример 3. Рассчитать объем воды и объем 95% об. этилового спирта для приготовления 500 см³ 40% об. раствора этанола и его плотность.

Воспользуемся результатами предыдущего расчета. По условиям задачи в 500 см³ 40% об. раствора этанола должно содержаться $V_c = 500 \cdot 0,4 = 200$ см³ чистого спирта. Найдем, в каком объеме 95% об. раствора будет содержаться это количество:

$$V_{p-ра} = 200/0,95 = 210,53 \text{ см}^3.$$

Из уравнения из таблицы 2 для 20 °С и 500 см³ найдем количество добавляемой воды для 100% спирта:

$$V_{H_2O} = (-0,987 \cdot 40 + 101,93) \cdot 5 = 312,25 \text{ см}^3.$$

Учитывая, что 10,53 см³ ($V_{p-ра} - 200$) воды уже добавлено с 95%-ным раствором, начальное количество воды составит

$$312,25 - 10,53 = 301,72 \text{ см}^3.$$

Расчетная плотность 40% об. раствора этанола будет

$$\rho_{см} = M/V_{ж} = (V_b \cdot \rho_b + V_c \cdot \rho_c) / 500 = (312,25 \cdot 0,99823 + 200,0 \cdot 0,78927) / 500 = 0,9391 \text{ г/см}^3.$$

Табличное значение 0,9480 г/см³. Погрешность менее 1%.

Массовое содержание этилового спирта в 40% об. растворе этанола

$$x_b = V_c \cdot \rho_c / (V_b \cdot \rho_b + V_c \cdot \rho_c) \cdot 100 = 33,62\% \text{ мас.}$$

Пример 4. Представляет интерес нахождение максимального мольного содержания ассоциата в растворе этанола.

Воспользуемся уравнениями из табл. 1. Экстремум функций достигается при равенстве производной нулю. При 20 °С для функции

$$A^* = -0,000164x^2 + 0,0159x + 0,0225$$

будет $dA^*/dx = -0,000328x + 0,0159 = 0$, откуда $x = 0,0159/0,000328 = 48,476\%$ мас. Подставляя это значение в выражение для A^* , получим, что максимальное количество равновесных молей для $A^* - \max A^* = 0,4079$ мол.

Вычислим объемное содержание спирта. Расчетная плотность смеси 48,476% мас. раствора этанола согласно (5) равна

$$\rho_{см} = (0,0361 \cdot 0,4079 \cdot 100) / ((51,524/18,015 - 0,4079) \cdot (48,476/46,069 - 0,4079)) = 0,9319 \text{ г/см}^3.$$

Объем жидкости для 100 г смеси

$$V_{ж} = M/\rho_{см} = 100/0,9319 = 107,308 \text{ см}^3,$$

объемное содержание спирта равно

$$(48,476/0,78927)/107,308 = 57,24\% \text{ об.}$$

Пример 5. Найдем, при каком содержании этанола в воде будет наблюдаться максимальное уменьшение объема раствора.

Для определенности возьмем 100 г раствора. Для нахождения минимального объема раствора $V_{ж}$ обратимся к формуле (3). Возьмем производную и приравняем ее нулю:

$$dV_{ж}/dx = (-0,000328x + 0,0159) \cdot (Mma/\rho_a - Mmb/\rho_b - Mmc/\rho_c) = 0.$$

Отсюда $x = 0,0159/0,000328 = 48,476\%$ мас. (57,24% об.), что совпадает с результатом, полученным в примере 4, т.е. минимальный объем спиртового раствора будет при максимальном количестве равновесных молей ассоциата A^* , т.е. надо смешать $48,476/0,78927 = 61,418$ мл спирта и $51,524/0,99823 = 51,615$ мл воды.

Выводы и рекомендации. Предложена эффективная модель оценки плотности водных растворов этилового спирта – многоатомного продукта химической и пищевой промышленности. Ввиду того, что нелинейное поведение спиртовых растворов создает определенные трудности при приготовлении растворов заданного содержания, а взятые при этом неверные соотношения воды и спирта могут привести к значительным убыткам, большую значимость приобретает правильный расчет плотности водно-спиртовых смесей. Такой методикой, обладающей простотой использования и высокой точностью расчета (погрешность расчета составляет менее 1%), может служить приведенная здесь методика на основе «моногидратного» подхода с помощью которого, стал возможен расчет равновесных концентраций моногидрата и его плотности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таблицы для определения содержания этилового спирта в водноспиртовых растворах. М.: Государственный комитет стандартов, 1972. 364 с.

УДК 621.793.79

Д. В. Малышев¹, М. Е. Соловьев¹, С. Л. Балдаев²

¹Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: deniscs49@gmail.com,
m.e.soloviev@gmail.com

²ООО «Технологические системы защитных покрытий»
Россия, г. Москва, г. Щербинка, e-mail: s.baldaev@tspc.ru,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ШАГА НАНЕСЕНИЯ ДОРОЖКИ ПОРОШКОВОГО ПОКРЫТИЯ

Исследовано влияние технологических параметров порошковой лазерной наплавки металла на величину оптимального шага дорожек напыления, при которой достигается наиболее ровная поверхность наплавки. Получена математическая модель данного процесса в форме уравнения двухфакторной параболической регрессии. Найдены оптимальные значения мощности лазера и подачи порошка, обеспечивающие максимальную величину оптимального шага нанесения дорожек.

Ключевые слова: металлические покрытия, порошковая лазерная наплавка, оптимальный шаг напыления

D. V. Malyshev¹, M. E. Soloviev¹, S. L. Baldaev²

¹Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: deniscs49@gmail.com, m.e.soloviev@gmail.com
²LLC "Technological systems of protective coatings"
Moscow, Shcherbinka, e-mail: s.baldaev@tspc.ru

DETERMINING THE OPTIMAL POWDER COATING STEP

The influence of technological parameters of laser powder surfacing of metal on the optimal pitch of the spraying tracks, at which the most even surface of the surfacing is achieved, was studied. A mathematical model of this process is obtained in the form of a two-factor parabolic regression equation. The optimal values of laser power and powder supply were found to ensure the maximum value of the optimal step for applying the tracks.

Keywords: metal coatings, laser powder surfacing, optimal spraying pitch

Конструктивная прочность материалов, используемых для создания деталей оборудования и машин, играет ключевую роль в определении их надежности и долговечности [1]. Для улучшения характеристик прочности

поверхностных слоев часто применяют методы нанесения покрытий, которые способствуют защите материала от внешних воздействий и увеличивают срок службы деталей. Это, в свою очередь, позволяет снизить затраты, связанные с ремонтом.

При использовании численных методов в гидродинамике для моделирования процесса формирования покрытия, форма пятна контакта обычно определяется в ходе моделирования. Однако в таких случаях также полезно иметь простую и универсальную аппроксимирующую функцию для профиля пятна контакта. Это может быть полезно для сравнения результатов численного моделирования с экспериментальными данными, а также в случаях, когда основное внимание уделяется задачам теплопереноса [2] или моделированию процесса образования покрытия на конкретном изделии [3].

В большей части исследований сечение области нанесения материала обычно описывается с использованием базовых математических функций, таких как парабола, круговая дуга или эллипс, несмотря на то что на практике форма этого сечения может иметь более сложную геометрию [4-6]. При формировании покрытия характер его профиля изменяется, так что описать данный процесс только изменением параметров одной функции, к примеру параболы, становится затруднительным и для описания динамики формирования покрытия потребуется использовать несколько функций. При этом выбор определенной аппроксимирующей функции может существенно влиять на точность моделирования поверхности покрытия, и этот выбор может быть неоднозначным. В работе [7] предложены универсальные аппроксимирующие функции для профиля дорожки пятна напыления, позволяющие моделировать данный профиль для разных условий технологического процесса.

Технологический процесс нанесения покрытия состоит в последовательном наложении порошкообразного материала на поверхность. Он включает в себя перемещение лазерной свечи с определенным сдвигом оси текущей дорожки относительно предыдущей. Такой сдвиг называют шагом нанесения, который в дальнейшем будем обозначать w . Если шаг нанесения меньше, чем ширина профиля дорожки, то происходит наложение профилей, и материал второй дорожки заполняет пространство между этими профилями [8]. При этом возникает задача выбора оптимального значения w , при котором избыток материала, образующийся при нахлесте профилей, полностью заполняет свободное пространство между ними. Ранее в работе [9] были рассчитаны оптимальные значения w для дорожек некоторых простых профилей.

Целью данной работы являлось исследование влияния технологических параметров лазерного напыления порошкообразного покрытия на ве-

личину оптимального шага нанесения при аппроксимации профиля сечения дорожки биквадратичной функцией, предложенной в [7].

Для того чтобы достичь оптимального результата при наложении покрытия важно, чтобы площади криволинейных треугольников ABC и DEB, показанных на рис. 1, образованных пересечением профилей смежных дорожек были равными.

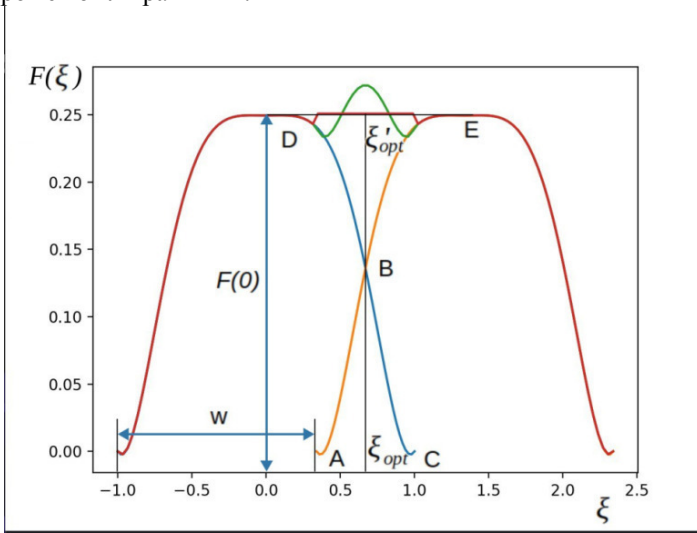


Рис. 1. Схема к вычислению оптимальной координаты нахлеста при наложении дорожек при оптимальном значении шага w

С учетом симметрии фигур относительно вертикальной линии, проходящей через точку пересечения профилей, оптимальное положение этой точки предполагает сбалансированность площадей образованных треугольников. Условие равенства площадей можно выразить следующим образом:

$$H\xi_{opt} - \int_0^{\xi_{opt}} F(\xi)d\xi = \int_{\xi_{opt}}^1 F(\xi)d\xi, \quad (1)$$

где $F(\xi)$ - функция, описывающая линию профиля от безразмерной координаты ξ , $H = F(0)$ - высота профиля.

Выполнив преобразование данной формулы, получаем следующее выражение для оптимальной безразмерной координаты нахлеста:

$$\xi_{opt} = \frac{1}{F(0)} \int_0^1 F(\xi)d\xi. \quad (2)$$

Оптимальное значение шага нанесения дорожек w_{opt} в безразмерных единицах может быть выражено через ξ_{opt} по формуле

$$w_{opt} = 2 - 2(1 - \xi_{opt}) = 2\xi_{opt}. \quad (3)$$

На рис. 1 показаны два варианта расположения избытка материала в области нахлеста дорожек. В первом варианте профиль избытка материала вычисляли путем сложения профилей первой и второй дорожки в области их пересечения. В этом случае линия профиля избытка материала имеет характер кривой с максимумом. Такая форма будет образовываться, если материал в области нахлеста быстро затвердевает, не успевая растекаться. На практике этот вариант является нежелательным, поскольку в данном случае ровной поверхности наплавки не получается. Во втором варианте профиль в области нахлеста получали выравниванием кривой, полученной в первом варианте, по ее средней линии. В этом случае, как видно из рисунка, в области нахлеста образуется ровная поверхность, высота которой в точности соответствует максимумам профилей первой и второй дорожек. Очевидно, такой вариант расположения материала в области нахлеста будет идеальным с точки зрения обеспечения ровной поверхности наплавки. Для реальных условий наплавки вид профиля в данной области должен располагаться между этими предельными вариантами. Расчет реальной кривой должен производиться путем решения задачи моделирования процесса наплавки для реальных технологических параметров. Для проведения такого расчета важно уметь вычислять значение ξ_{opt} при различных технологических параметрах процесса наплавки. В работе [7] были рассчитаны такие значения для экспериментальных данных, приведенных в работе [10].

В настоящей работе на основе параметров аппроксимации профилей наплавки, которые были представлены в работе [7], был произведен регрессионный анализ методом наименьших квадратов с целью получения зависимости ξ_{opt} от технологических параметров наплавки: мощности лазера x_1^{nat} (310–1500 Вт) и подачи порошка, x_2^{nat} (12–100 г/м).

Для расчетов была использована формула двухфакторной параболической регрессии

$$Y = \xi_{opt}(x_1x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2, \quad (4)$$

где $x_i = \frac{x_i^{nat} - x_{i0}^{nat}}{\Delta x_i^{nat}}$ - значения независимых переменных в безразмерном масштабе; x_{i0}^{nat} - средние значения независимых переменных в натуральных единицах; Δx_i^{nat} - интервалы варьирования относительно средних значений; $i = 1, 2$, $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}$ - коэффициенты регрессии, вычисляемые методом наименьших квадратов путем аппроксимации выборки зна-

чений ξ_{opt} при различных значениях технологических параметров. В безразмерных координатах диапазон исследованных параметров находится в интервалах $-1 \leq x_1 \leq 1$, $-1 \leq x_2 \leq 1$.

Для вычисления коэффициентов регрессии, статистического анализа уравнения и визуализации графика поверхности функции регрессии была написана программа на языке программирования Python с использованием модулей numpy, scipy и matplotlib.

В результате расчета вычислены следующие значения коэффициентов регрессии:

$$b = [0.7673, 0.0194, 0.0427, -0.0028, -0.0492, -0.0090]. \quad (5)$$

Качественно адекватность уравнения регрессии можно оценить по близости к 1 коэффициента детерминации модели

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y^i - \hat{y}^i)^2}{\sum_i (y^i - \bar{y})^2}, \quad (6)$$

где Y^i - значения откликов по выборке; \hat{Y}^i - рассчитанные значения откликов по уравнению регрессии (4) с коэффициентами (5); \bar{Y} - среднее значение откликов.

Рассчитанное значение коэффициента детерминации $R^2 = 0.74$, что можно оценить как подтверждение адекватности модели, учитывая большой разброс форм и размеров профилей дорожек [10].

Для анализа полученной зависимости необходимо вычислить координаты точки предполагаемого экстремума из решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = -b_1, \\ 2b_{22}x_2 + b_{12}x_1 = -b_2. \end{cases} \quad (7)$$

Решая систему, получаем точку $x^{extr} = [3.2471, 0.1381]$. Для проверки того, является ли эта точка экстремумом, нужно установить определенность матрицы Гессе

$$H = \begin{vmatrix} 2b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & 2b_{22} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

В рассматриваемом случае матрица Гессе

$$H = \begin{vmatrix} -0.0056 & -0.0090 \\ -0.0090 & -0.0983 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

а ее собственные значения $L = [-0.0047, -0.0992]$.

Поскольку оба собственные значения отрицательны, то x^{extr} является точкой максимума, что иллюстрируется графиком поверхности отклика (рис. 2). Значение отклика в точке экстремума составило $Y^{extr} = 0.8017$. Это максимальная величина ξ_{opt} , которую можно достичь для рассмотренного набора параметров.

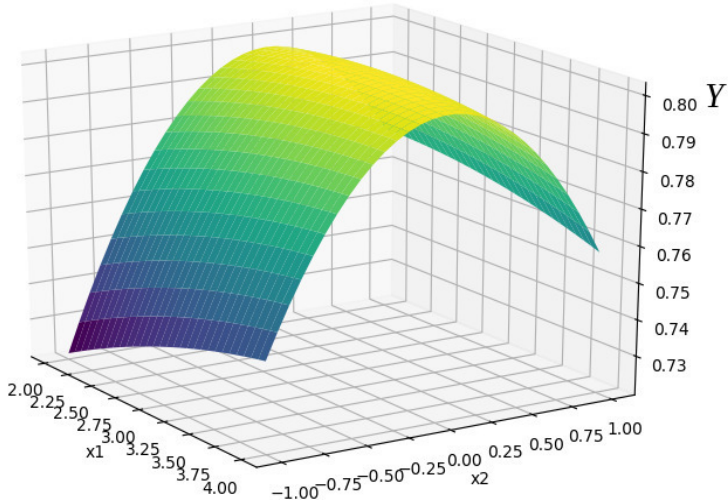


Рис. 2 . График вида поверхности отклика по уравнению регрессии (4) с коэффициентами (5)

Исходя из графика, представленного на рис. 2, можно сделать следующие выводы:

1. Поскольку координата экстремума $x_1^{extr} = 3.2471$ лежит за пределами изученной области, в изученной области с увеличением мощности лазера значения ξ_{opt} монотонно возрастают.

2. Для зависимости ξ_{opt} от x_2 , напротив, координата экстремума $x_2^{extr} = 0.1381$ лежит почти в центре исследованной области, то есть для данной зависимости имеет место ярко выраженный максимум. Причина этого состоит в том, что при малых подачах порошка размеры профиля сечения дорожки также оказываются малыми, а поэтому и оптимальный шаг наложения дорожек также будет малым. При слишком большой подаче, мощности лазера оказывается недостаточно, чтобы полностью прогреть наплавляемый материал. В результате этого снижается эффективность наплавки и величина оптимального шага нанесения дорожек.

Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации технологического процесса нанесения порошкового покрытия, повышая, с одной стороны, его эффективность, а с другой стороны, обеспечивая более высокое качество поверхности наплавляемого материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобанов М.Л. Защитные покрытия / Н.Г. Кардолина, Н.Г. Россина, А.С. Юровских. Екатеринбург: Изд-во Урал ун-та, 2014. 200 с.
2. Jhavar S. Enhancement of Deposition Quality in Micro-plasma Transferred Arc Deposition Process / S. Jhavar, N.K. Jain, C.P. Paul // *Materials and Manufacturing Processes*. 2014. Vol. 29. P. 1017–1023. DOI: 10.1080/10426914.2014.892984.
3. Metal Deposition: PlasmaBased Processes. *Encyclopedia of Plasma Technology* / N.K. Jain, M.S. Sawant, S.H. Nikam, S. Jhavar. New York: Taylor and Francis, 2016. P. 19. DOI: 10.1081/E-EPLT-120053919.
4. Modeling of ferrite formation in a duplex stainless steel weld considering non-uniform starting microstructure / W. Zhang, T. DebRoy, T.A. Palmer, J.W. Elmer // *Acta Materialia*. 2005. Vol. 53. P. 4441–4453. DOI: 10.1016/j.actamat.2005.05.040.
5. Alaluss K. Additive Manufacturing of Complex Components through 3D Plasma Metal Deposition – A Simulative Approach / K. Alaluss, P. Mayr // *Metals*. 2019. Vol. 9. P. 574–693. DOI: 10.3390/met9050574.
6. Davis J.R. *Handbook of Thermal Spray Technology* / ed. by J.R. Davis. ASM International, 2004. 347 p.
7. Аппроксимация профиля сечения пятна напыления при газотермическом нанесении порошкового покрытия / М.Е. Соловьев, С.С. Кокарев, С.Л. Балдаев, Л.Х. Балдаев, В.И. Мищенко, М.О. Федорова // *Информационно-технологический вестник*. 2022. № 3. С.138-163.
8. Jhavar S. Development of micro-plasma transferred arc (μ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications / S. Jhavar, N.K. Jain, C.P. Paul // *Journal of Materials Processing Technology*. 2014. Vol. 214. P. 1102–1110. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2013.12.016>.
9. Overlapping model of beads and curve fitting of bead section for rapid manufacturing by robotic MAG welding process / Y. Cao, S. Zhu, X. Liang, W. Wang // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2011. Vol. 27. P. 641–645. URL: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.11.002>
10. De Oliveira U. Analysis of coaxial laser cladding processing conditions / U. De Oliveira, V. Ocelik, J.Th.M. De Hosson // *Surface & Coatings Technology*. 2005. Vol. 197. P. 127–136. URL: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2004.06.029>

УДК 004.94

О. Ю. Марьясин, А. Н. Плохотнюк, Л. И. Тихомиров

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: maryasinou@ystu.ru, admin@nixson.ru,
lenusscik@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ РЕЖИМАМИ РАБОТЫ «УМНЫХ» ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Рассмотрены задачи моделирования и управления режимами работы «умных» электрических сетей, в которых для энергоснабжения потребителей используется не только центральная электросеть, но и локальные генераторы и накопители энергии. Задача оптимального управления режимами работы «умной» сети может быть поставлена как задача оптимального потока мощности. Выполнена реализация модели простой электросети малого предприятия, включающей двух энергопотребителей с собственными генераторами энергии. В работе показано, что использование локальных генераторов, таких как возобновляемые генераторы или генераторы на дешевом ископаемом топливе, позволяет получить существенную экономию по оплате за электроэнергию.

Ключевые слова: электрические сети, smart grid, моделирование, оптимальное управление, optimal power flow, pandapower

O. Yu. Maryasin, A. N. Plohotnyuk, L. I. Tihomirov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru, admin@nixson.ru,
lenusscik@yandex.ru

MODELING AND CONTROL OF SMART GRIDS

The paper describes the problems of modeling and controlling the operating modes of smart electrical networks, in which not only the central power grid, but also local generators and energy storage devices are used to supply energy to consumers. The problem of optimal control of a smart grid can be posed as a problem of optimal power flow. A model of a simple electrical network for a small enterprise has been implemented, including two energy consumers with their own energy generators. The paper shows that the use of local generators, such as renewable generators or low-cost fossil fuel generators, can provide significant savings in electricity bills.

Keywords: electrical networks, smart grid, modeling, optimal control, optimal power flow, pandapower

Введение. В последнее десятилетие к осуществлению программ и проектов в направлении создания «умных» электрических сетей приступило подавляющее большинство индустриально развитых, а также многие развивающиеся страны [1]. Термин «умные энергетические системы» (Smart Energy Systems) был впервые введен в 2012 году [2]. Позднее в качестве синонима этого термина стал использоваться термин «умные электрические сети» (Smart Grid). Под Smart Grid понимаются «электрические сети, удовлетворяющие будущим требованиям по энергоэффективному и экономичному функционированию энергосистемы за счет скоординированного управления и при помощи современных двусторонних коммуникаций между элементами электрических сетей, электрическими станциями, аккумулирующими устройствами и потребителями» [1].

Энергетическая стратегия России на период до 2030 года в качестве одного из приоритетных направлений научно-технического прогресса в энергетическом секторе отмечает создание высокоинтегрированных интеллектуальных системообразующих и распределительных электрических сетей нового поколения в Единой энергетической системе России [3]. В 2021 году правительство России утвердило дорожную карту развития технологий передачи электроэнергии и интеллектуальных энергосистем в течение трёх лет, в которой планируется внедрение систем накопления энергии, благодаря которым, использование возобновляемых источников энергии, таких как солнечные электростанции и ветрогенераторы, будет выведено на новый уровень [4].

Появление распределенных генераторов энергии, таких как фотоэлектрические панели, ветряные турбины, дизельные и газовые генераторы, обусловило появление распределенных микросетей (MicroGrid), создающих локальные энергетические экосистемы, в которых потребители электроэнергии также являются ее производителями [5]. В настоящее время многие предприятия приобретают локальные генераторы, в том числе возобновляемые (Renewable Energy Sources – RES), и накопители энергии с целью снижения оплаты за электроэнергию, уменьшения выбросов парниковых газов и повышения надежности электроснабжения своих энергопотребителей. В ближайшем будущем можно ожидать взрывного роста количества распределенных генераторов и накопителей электроэнергии на предприятиях. В результате возникает множество сложных проблем, связанных с принятием решений при управлении режимами работы сетей Smart Grid и MicroGrid. Некоторые из которых могут быть эффективно решены только с привлечением методов математического и компьютерного моделирования, оптимального управления и искусственного интеллекта.

1. Моделирование и управление режимами сети Smart Grid. Распределенная электрическая сеть Smart Grid может быть представлена как граф $G(N, E)$, где N представляет собой множество шин (узлов) в сети, а E – множество ребер (дуг), соединяющих шины. Узлами электрической сети являются шины B и устройства D . К каждой шине может быть подключено несколько электрических устройств, которые могут генерировать или потреблять электроэнергию из сети. Множество всех устройств, подключенных к шине $b \in B$, обозначим как $D_b \subseteq D$. Предполагается, что каждое устройство подключено к одной шине. С каждой шиной b связан набор технологических переменных: напряжение шины U_b , ток шины I_b , активная мощность P_b , реактивная мощность Q_b и полная мощность $S_b = P_b + jQ_b$. Обозначим $a_{ij} \in A_i$ дугу с начальной шиной i и конечной шиной j . Аналогично, переменные I_{ij} , P_{ij} , Q_{ij} и S_{ij} относятся к ребру a_{ij} .

Различные электрические устройства $d \in D$ можно разделить на пассивные нагрузки $l \in D_L$, генераторы $g \in D_G$ и распределенные накопители энергии (Distributed Energy Storage – DES) $des \in D_{DES}$. Среди генераторов выделим RES генераторы g_r , генераторы на ископаемом топливе (Fossil Energy Sources – FES) g_f и эталонный (балансировочный) генератор g_{st} . Назначением эталонного генератора является балансировка потоков мощности с учетом выработки электроэнергии, нагрузки и потерь в сети. С каждым устройством d также связан свой набор переменных: напряжение устройства U_d , ток устройства I_d , активная P_d и реактивная Q_d мощности. Все указанные переменные образуют множество переменных состояния сети Smart Grid.

Задача оптимального управления режимами работы сети Smart Grid, которая помимо центральной сети электроснабжения включает локальные источники, накопители и потребители энергии может быть поставлена как задача оптимального потока мощности (Optimal Power Flow – OPF). OPF – хорошо известная задача оптимизации в энергосистемах. Эта проблема была впервые представлена Карпенгером в 1962 году [6]. Задача OPF заключается в том, чтобы найти такой установившийся режим энергосистемы, который минимизирует затраты на производство электроэнергии при одновременном удовлетворении эксплуатационных ограничений. Задача OPF может быть сформулирована как задача нелинейного программирования, в которой некоторые ограничения и, возможно, целевая функция являются нелинейными.

Существует два основных варианта постановки задачи OPF [7]. Это вариант для переменного тока (AC Power Flow) и вариант для “постоянного” тока (DC Power Flow). Сначала приведем основные выражения для варианта AC Power Flow. Задача OPF включает множество ограничений, накладываемых на электрические параметры шин B , ребер A и устройств D ,

включая пассивные нагрузки l , генераторы g и накопители энергии des . Существуют различные расширения основных вариантов постановки задачи OPF. Поэтому в данной работе мы приведем только основные условия. Интересующиеся этим вопросом могут обратиться к работе [8].

Активная P_b и реактивная Q_b мощности шины b должны удовлетворять условиям

$$P_b = \sum_{d \in D_b} P_d, \quad (1)$$

$$Q_b = \sum_{d \in D_b} Q_d. \quad (2)$$

Кроме того, они должны удовлетворять условиям

$$P_b = \sum_{j=1}^N |U_b| |U_j| (G_{bj} \cos(\theta_{bj}) + B_{bj} \sin(\theta_{bj})), \quad (3)$$

$$Q_b = \sum_{j=1}^N |U_b| |U_j| (G_{bj} \sin(\theta_{bj}) - B_{bj} \cos(\theta_{bj})), \quad (4)$$

где j – номер шины, подключенной к шине b ; G_{bj} – активная проводимость, B_{bj} – емкостная проводимость; $\theta_{bj} = \theta_b - \theta_j$, θ_b – фазовый угол в узле b .

Активная P_{ij} и реактивная Q_{ij} мощности ребра a_{ij} могут быть рассчитаны по формулам

$$P_{ij} = G_i |U_i|^2 + |U_i| |U_j| (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \quad (5)$$

$$Q_{ij} = -B_i |U_i|^2 + |U_i| |U_j| (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})), \quad (6)$$

Активные и реактивные мощности всех устройств D электрической сети должны удовлетворять ограничениям

$$P_{dl} \leq P_d \leq P_{du}, \quad d \in D, \quad (7)$$

$$Q_{dl} \leq Q_d \leq Q_{du}, \quad d \in D, \quad (8)$$

где P_{dl} , P_{du} , Q_{dl} , Q_{du} – минимальное и максимальное значения активной и реактивной мощности устройства d соответственно.

Кроме того, должны выполняться ограничения на фазовый угол

$$0 \leq \theta_{ij} \leq 2\pi, \quad (9)$$

$$\theta_{0,j} = 0, \quad (10)$$

где θ_{0j} – фазовый угол эталонного генератора.

Активные и реактивные мощности ребер a_{ij} должны удовлетворять условиям

$$P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \leq S_{iju}^2, \quad (11)$$

где S_{iju}^2 – верхняя граница полной мощности ребра a_{ij} .

Устройства DES могут как генерировать, так и потреблять энергию из сети. Однако, в отличие от генераторов, передача активной мощности накопителем энергии дополнительно ограничивается его текущим уровнем заряда

$$\frac{1}{\Delta t \eta} (C_{dt} - C_{du}) \leq P_{dt} \leq \frac{\eta}{\Delta t} (C_{dt} - C_{dl}), d \in D_{DES}, \quad (12)$$

где C_{dt} – уровень заряда в момент времени t ; Δt – шаг по времени, $\eta \in [0, 1]$ – коэффициент эффективности батареи; P_{dt} – активная мощность генерируемая или потребляемая накопителем в момент времени t . Уровень заряда C_{dt} должен удовлетворять ограничениям

$$C_{dl} \leq C_{dt} \leq C_{du}. \quad (13)$$

Вариант для “постоянного” тока получается из варианта для “переменного” тока путем введения ряда упрощающих допущений и отказа от учета реактивной мощности. Кроме того, поделив выражения (3)–(6) на $|U_i|$, примем $|U_i| \cong 1$. Вариант DC Power Flow, как правило, обеспечивает более быстрое решение и лучшую сходимость по сравнению с AC Power Flow. В этом варианте условие (3) преобразуется в выражение

$$P_b = \sum_{a_{bj} \in A} B_{bj} \theta_{bj}, \quad (14)$$

а условие (5) в выражение

$$P_{ij} = B_{ij} \theta_{ij}. \quad (14)$$

В варианте DC Power Flow к уравнениям (14) и (15) добавляются условия (1) и (7), (9), (10), (12), (13).

Критерий оптимальности в задаче OPF имеет следующий вид:

$$E_{OPF} = E_G + \Delta E + \lambda \psi, \quad (15)$$

где E_G – стоимость электроэнергии, получаемой от всех видов генераторов; ΔE – стоимость потерь электроэнергии в сети; ψ – штрафной член, связанный с нарушением эксплуатационных ограничений (11); λ – коэффициент штрафа.

Таким образом, для варианта AC Power Flow задача OPF включает критерий (15) и ограничения (1)–(13), а для варианта DC Power Flow критерий (15) и ограничения (1), (7), (9), (10), (12), (13). В результате решения задачи OPF определяются оптимальные значения активной и реактивной мощности всех устройств сети предприятия. Хотя задача OPF представляет собой статическую задачу нелинейного программирования, она включает псевдодинамические зависимости типа (12). Это накладывает дополнительные требования к процедуре решения задачи.

2. Решение задачи OPF. Решение задачи OPF практически невозможно без компьютерного моделирования функционирования энергосистемы. Проводить оптимизацию на реальных системах электроснабжения слишком сложно, долговременно и опасно. Моделирование позволяет выполнять оптимизацию функционирования сети на виртуальной модели, что сокращает время и позволяет избежать неэффективных режимов работы и перегрузки реальной физической инфраструктуры энергосистемы.

Существует множество программных пакетов для моделирования установившихся режимов энергосистем и решения задачи OPF, таких как PowerFactory, PowerWorld, ERACS и ETAP, все из которых являются коммерческими. Среди свободно-доступных программных пакетов для моделирования систем энергоснабжения наиболее популярными в исследованиях по управлению энергосистемами являются библиотеки MATPOWER и PSAT для пакета MATLAB, а также PYPOWER (Python интерфейс для MATPOWER) и pandapower для языка Python.

Учитывая растущую популярность языка Python для решения задач моделирования, оптимизации, анализа данных, машинного обучения, глубокого машинного обучения, обучения с подкреплением и многих других, в данной работе для моделирования сети Smart Grid и решения задачи OPF применена библиотека pandapower. Pandapower [9] – это простая в использовании библиотека функций на языке Python, предназначенная для анализа и оптимизации энергосистем. Она использует популярную библиотеку анализа данных pandas и совместима с форматом MATPOWER case. Pandapower позволяет использовать различные решатели, включая улучшенную реализацию метода Ньютона-Рафсона, все решатели PYPOWER и библиотеку PowerModels.jl. Pandapower позволяет решать задачи OPF для случаев AC Power Flow и DC Power Flow посредством взаимодействия с PYPOWER или PowerModels.jl. Входные данные задаются с помощью структуры данных pandapower, а затем конвертируются в структуры данных PYPOWER или PowerModels.jl, с которыми выполняется оптимизация. Целевая функция может быть определена либо кусочно-линейной, либо полиномиальной функцией выходной активной и реактивной мощности соответствующих элементов.

Рассмотрим пример простой сети MicroGrid малого предприятия, схема которой показана на рис. 1.

Сеть MicroGrid на рис. 1 включает внешнюю сеть 10 кВ, Шину 1 и Шину 2 на 10 кВ, Линию 1 протяженностью 10 км на 10 кВ, трансформатор 10 кВ/0,4 кВ, Шину 3 на 380 В, Линию 2 протяженностью 800 м на 380 В, Линию 3 протяженностью 500 м на 380 В, Шину 4 и Шину 5 на 380 В, двух энергопотребителей. Потребитель 1 содержит Нагрузку 1 мощностью 200 кВт (производственный корпус) и газопоршневой генератор мощностью 120 кВт.

Потребитель 2 содержит Нагрузку 2 мощностью 50 кВт (административное здание) и солнечную панель (PV панель) мощностью 50 кВт.

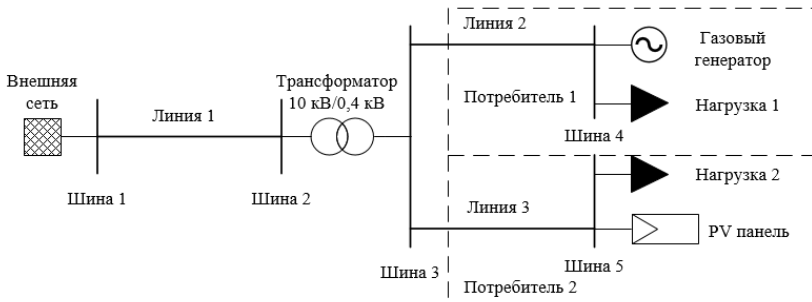


Рис. 1. Схема сети MicroGrid предприятия

Фрагмент программы на языке Python, иллюстрирующей создание модели сети, показанной на рис. 1, с использованием объектов библиотеки pandapower представлен на рис. 2. В программе последовательно создаются такие элементы сети, как шины 1–5 (bus1–bus5), внешняя сеть (ext_grid), трансформатор 10 кВ/0,4 кВ (trafo1), линии 1–3 (Line 1 – Line 3), нагрузка (load1) и газопоршневой генератор (GAS generator) для потребителя 1, нагрузка (load2) и солнечная панель (PV generator) для потребителя 2. Для всех объектов задаются необходимые значения параметров. Библиотека pandapower включает богатый набор элементов для создания электрических сетей. Кроме показанных на рис. 1, можно отметить такие элементы, как накопители энергии, двигатели, переключатели, шунты, измерители параметров электросети и другие.

Газопоршневые генераторы, как и другие типы FES генераторов, используются на предприятии для резервного энергоснабжения и сокращения затрат на оплату за электроэнергию. От других генераторов на ископаемом топливе газопоршневые генераторы отличаются более низкой стоимостью газового топлива. Кроме того, газ является более экологически чистым видом топлива, по сравнению с другими видами топлива. Генератор может включаться в дневное время, когда рыночная цена на электроэнергию достигает своего максимума. RES генераторы, такие как солнечные панели, могут использоваться для тех же целей, что и FES генераторы, но в отличие от них они не производят выбросов парниковых газов. На рис. 3 показаны примеры профилей активной мощности, генерируемых в течение суток газопоршневым генератором и солнечной панелью. Так

как мощность PV панели зависит от интенсивности солнечного излучения, то изменения ее профиля будут иметь случайный характер. Для сглаживания профилей мощности RES генераторов в определенные часы, часто совместно с RES генераторами используют сетевые накопители энергии (устройства DES).

```
net = nw.create_cigre_network_lv()
bus1 = pp.create_bus(net, name="HV Busbar", vn_kv=10, type="b")
bus2 = pp.create_bus(net, name="HV Busbar 2", vn_kv=10, type="b")
bus3 = pp.create_bus(net, name="MV Main Bus", vn_kv=0.4, type="b")
bus4 = pp.create_bus(net, name="MV Bus 1", vn_kv=0.4, type="b")
bus5 = pp.create_bus(net, name="MV Bus 2", vn_kv=0.4, type="b")
pp.create_ext_grid(net, bus1, vm_pu=1.0, va_degree=0)
trafo1 = pp.create_transformer(net, bus2, bus3, name="20kV/400V transformer",
                               std_type="0.25 MVA 10/0.4 kV")
line1 = pp.create_line(net, bus1, bus2, length_km=10, std_type="NA2XS2Y 1x240 RM/25 6/10 kV",
                       name="Line 1")
line2 = pp.create_line(net, bus3, bus4, length_km=0.8, std_type="679-AL1/86-ST1A 380.0",
                       name="Line 2")
line3 = pp.create_line(net, bus5, bus3, length_km=0.5, std_type="679-AL1/86-ST1A 380.0",
                       name="Line 3")
pp.create_load(net, bus4, p_mw=0.2, min_p_mw=0, max_p_mw=0.3, q_mvar=0, name="load1")
pp.create_gen(net, bus4, p_mw=0.12, min_p_mw=0, max_p_mw=0.2, max_q_mvar=0.1, min_q_mvar=-0.1,
              vm_pu=1.03, controllable=True, name="GAS generator")
pp.create_load(net, bus5, p_mw=0.05, min_p_mw=0, max_p_mw=0.07, q_mvar=0, name="load2")
pp.create_sgen(net, bus5, p_mw=0.05, q_mvar=0, min_p_mw=0, max_p_mw=0.07, max_q_mvar=0.1,
               min_q_mvar=-0.1, controllable=True, type="PV", name="PV generator")
```

Рис. 2. Фрагмент программы

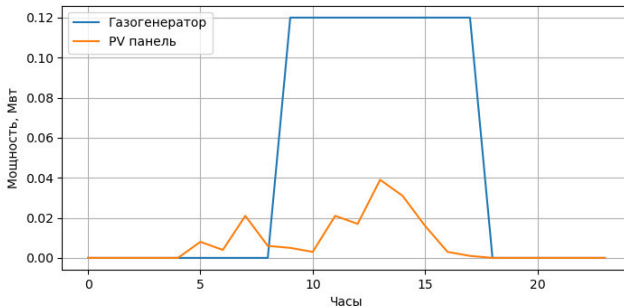


Рис. 3. Профили мощности генераторов сети MiroGrid

Для решения задачи OPF в библиотеке pandapower имеются функции runopf (для варианта AC Power Flow) и rundcopf (для варианта DC Power Flow). Оптимальный профиль активной мощности, потребленной из центральной электросети, получен в результате решения задачи OPF для варианта DC Power Flow (рис. 4). На этом же рисунке приведены профили активной мощности, потребленной нагрузками 1 и 2. Как видно из рис. 4, энергопотребление из центральной электросети значительно снижается в дневные часы из-за компенсации дорогой электроэнергией из электросети

более дешевой энергией от локальных генераторов (газопоршневого генератора и солнечной панели).

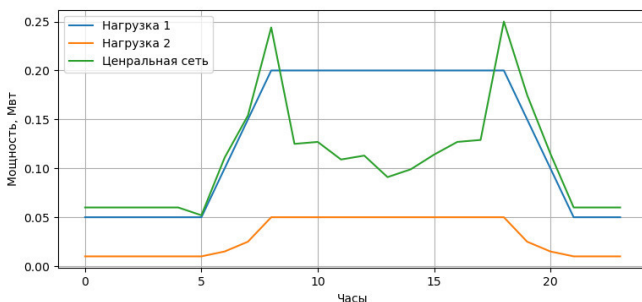


Рис. 4. Графики мощности, потребленной нагрузками и из центральной электросети

Оценим экономию, полученную в результате применения локальных генераторов. Суточное суммарное энергопотребление из центральной электросети без использования локальных генераторов для рассмотренного примера составляло бы 4,086 МВт, а с использованием локальных генераторов составляет только 2,615 МВт. Для потребителей 3 и 4 ценовых категорий при среднесуточной цене на электроэнергию 5000 руб./МВт суточная экономия на оплату электроэнергии для предприятия составит 7355 руб., а годовая экономия примерно 2 миллиона рублей. Это с учетом того что плата за мощность, которая составляет примерно 30% от стоимости электроэнергии, компенсирует затраты на газ и обслуживание солнечных панелей.

Закключение. В работе рассмотрена задача моделирования и управления режимами работы сетей Smart Grid, в которых для энергоснабжения потребителей используется не только центральная электросеть, но и локальные генераторы и накопители энергии. Задача оптимального управления режимами работы сети Smart Grid может быть поставлена как задача OPF. Задача OPF в работе представлена для вариантов AC Power Flow и DC Power Flow. Вариант DC Power Flow получается из варианта AC Power Flow путем введения ряда упрощающих допущений и отказа от учета реактивной мощности. Этот вариант, как правило, обеспечивает более быстрое решение и лучшую сходимость по сравнению с AC Power Flow.

В работе выполнена реализация модели простой сети MicroGrid малого предприятия, включающей двух энергопотребителей, каждый из которых для дополнительного энергоснабжения использует собственный источник энергии. Для моделирования сети предприятия и решения задачи

OPF в работе использовалась библиотека pandapower языка Python. В результате решения задачи OPF определены оптимальные значения всех электрических параметров элементов сети MicroGrid и оптимальный профиль энергопотребления предприятия из центральной электросети. В работе показано, что использование локальных генераторов, таких как RES или FES генераторы на дешевом ископаемом топливе, позволяет получить существенную экономию по оплате за электроэнергию для предприятий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кобец Б.Б.* Инновационное развитие электроэнергетики на базе концепции Smart Grid / Б.Б. Кобец, И.О. Волкова. М.: ИАЦ Энергия, 2010. 208 с.
2. From electricity smart grids to smart energy systems - a market operation based approach and understanding / H. Lund, A.N. Andersen, P.A. Ostergaard, B.V. Mathiesen, D. Connolly. Energy. 2012. Vol. 42. P. 96–102.
3. Распоряжение Правительства РФ от 13 ноября 2009 г. № 1715-р. URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/96681/> (дата обращения 27.11.2023)
4. Распоряжение Правительства РФ от 29 апреля 2021 г. № 1135-р. URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/400627617/> (дата обращения 27.11.2023)
5. *Tsikalakis A.G.* Centralized Control for Optimizing Microgrids Operation / A.G. Tsikalakis, N.D. Hatzigiorgiou // IEEE Trans. Energy Convers. 2008. Vol. 23. P. 241–248.
6. *Carpentier J.* Contribution a l'etude du dispatching economique // Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens. 1962. Vol. 3. P. 431–447.
7. *Wood A.J.* Power generation, operation, and control / A.J. Wood, B.F. Wollenberg. John Wiley & Sons, Inc., 1984.
8. *Skolfield J.K.* Operations research in optimal power flow: A guide to recent and emerging methodologies and applications / J.K. Skolfield, A.R. Escobedo // European Journal of Operational Research. 2022. Vol. 300. P. 387–404.
9. GitHub - e2nIEE/pandapower: Convenient Power System Modelling and Analysis based on PYPOWER and pandas. URL: <https://github.com/e2nIEE/pandapower> (дата обращения 27.11.2023)

УДК 531:519.6

И. А. Панкратов, Н. А. Салтыков

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, e-mail: pankratovia@info.sgu.ru,
2001ghghgh@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КОЛЕНЕ ТРУБЫ СРЕДСТВАМИ OPENFOAM

В данной статье рассмотрена математическая модель двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости в колене трубы. Для нахождения параметров нестационарного течения жидкости был применён метод конечных объёмов. Расчёты были произведены в свободно распространяемом пакете OpenFOAM. Рассмотрен случай, когда внутри вычислительной области находится некоторое тело. Приведены примеры численного решения для различных параметров задачи.

Ключевые слова: метод конечных объёмов, уравнения Навье-Стокса, OpenFOAM, icoFoam

I. A. Pankratov, N. A. Saltykov

National Research Saratov State University
Russia, Saratov, e-mail: pankratovia@info.sgu.ru, 2001ghghgh@gmail.com

MATHEMATICAL MODELING OF THE FLOW IN THE PIPE ELBOW BY OPENFOAM

In this paper, we consider a mathematical model of a viscous liquid flow in the pipe elbow. The finite volume method was applied to calculate the unsteady flow of water. Calculations were made in a freely distributed package OpenFOAM. The case is considered when there is a body inside the computational domain. Examples of a numerical solution for various parameters of the problem are given.

Keywords: finite volume method, Navier-Stokes equations, OpenFOAM, icoFoam

В настоящей работе в двумерном случае рассмотрена задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в колене трубы. Для описания движения жидкости использованы нестационарные дифференциальные уравнения в частных производных (система уравнений Навье-Стокса). Заметим, что т.к. жидкость полагается несжимаемой, то задан её кинематический коэффициент вязкости, а искомыми величинами являются век-

тор скорости и отношение давления к плотности (т.н. кинематическое давление).

В данной работе расчёт параметров течения жидкости был произведён с помощью пакета прикладных программ OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation CFD Tool Box) [1, 2], в котором реализован метод конечных объёмов. OpenFOAM базируется на наборе библиотек, предоставляющих инструменты для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Рабочим языком является C++. При этом большинство дифференциальных и тензорных операторов в программном коде уравнений до их трансляции в исполняемый файл может быть представлено в удобной для пользователя форме, а метод дискретизации для каждого оператора может быть выбран пользователем в процессе расчёта. Таким образом, в коде полностью инкапсулируются и разделяются понятия расчетной сетки (метод дискретизации), дискретизации основных уравнений и методов решения алгебраических уравнений [3]. Ранее указанный пакет был успешно применён одним из авторов настоящей работы к исследованию некоторых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости [4-6].

Целью настоящей работы является изучение работы стандартного решателя рассматриваемого пакета isoFoam в задаче о ламинарном движении несжимаемой ньютоновской жидкости в колене трубы.

На рис. 1 показаны сетка, использованная для проведения расчёта, и граничные условия задачи (в начальный момент жидкость внутри трубы находится в покое). Слева направо жидкость втекает со скоростью 3 м/с, а снизу вверх подаётся со скоростью 12 м/с. На остальной части границы задано условие неприлипания noSlip.

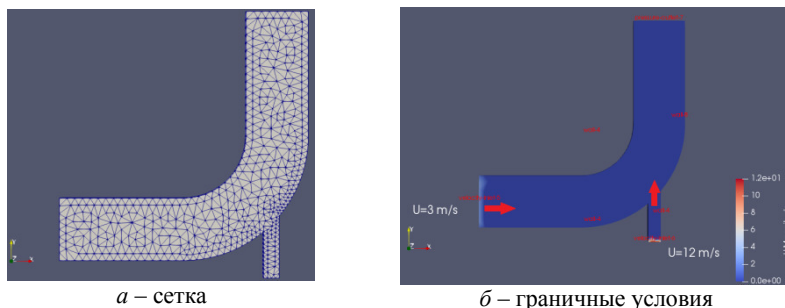


Рис. 1. Течение жидкости в колене трубы (начало расчёта)

Заметим, что сетка была сгенерирована с помощью утилиты fluent Mesh To Foam, использующей файл elbow.msh в формате ASCII [7]. В

OpenFOAM все расчёты проводятся на трёхмерной сетке, ячейки которой являются тетраэдрами. Для моделирования двумерных течений на передней и задней плоскостях задано специальное «пустое» граничное условие, а в направлении оси аппликата добавлена лишь одна ячейка (на рис. 1, а) она не показана).

Для внедрения тела внутрь расчётной области была использована утилита `snappyHexMesh`, которая позволяет создавать сложные расчетные области. Она генерирует трехмерные сетки из шестигранных элементов (hex) и расщепленных шестигранных элементов (splithex) автоматически из разбитой на треугольники области в формате стереолитографии (STL) [8, 9]. Сетка приближается к геометрической поверхности посредством итерационного улучшения исходной сетки и подгонки полученных расщепленных шестигранных элементов. Дополнительно, на следующем шаге, сетка уплотняется и дополняется элементами пристеночного слоя. Настройка уровня улучшения исходной сетки очень гибка и работа с поверхностями является трудоемким процессом при заданном качестве сетки, которое необходимо достигнуть, поэтому различные исследователи прилагают усилия по частичной автоматизации этого процесса [10-13]. Утилита поддерживает распараллеливание и балансировку нагрузки на каждой итерации.

Параметры, необходимые для работы указанной утилиты, заданы в слова `resnappyHexMeshDict`, который находится в папке `system` основной папки проекта. Этот словарь включает в себя переключатели на верхнем уровне, которые управляют различными этапами процесса создания сетки; и отдельные под-словари для каждого процесса. Вся геометрия, используемая в `snappyHexMesh`, указывается в под-словаре `geometry` словаря `snappyHexMeshDict`.

Геометрия может быть задана посредством поверхностей STL или простейших геометрических объектов OpenFOAM. Блок `castellatedMeshControls` является под-словарем параметров грубой сетки. Важным параметром этого блока является `locationInMesh`. Это ключевое слово задано в `castellatedMeshControls`. `locationInMesh` – координата точки между внедряемым телом и границами трубы (эта точка должна обязательно принадлежать построенной сетке). Блок `snapControls` – под-словарь параметров привязки. Блок `ddLayersControls` – под-словарь параметров добавления призматических слоев. Блок `meshQualityControls` – под-словарь параметров качества сетки.

Заметим также, что при создании фоновой сетки (напомним, что в нашем случае она была сгенерирована с помощью утилиты `fluentMeshToFoam`) необходимо учесть следующие требования:

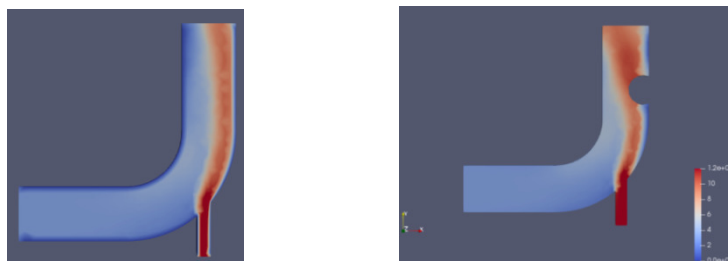
- а) сетка должна состоять только из шестигранных ячеек;

б) стороны ячейки должны быть приблизительно одинаковыми, по крайней мере, вблизи поверхностей, к которым применяется последующая процедура привязки, в противном случае сближение процедуры привязки происходит медленно, что в некоторых случаях приводит к аварийному останову;

в) должно быть хотя бы одно пересечение края ячейки с поверхностью, заданной в формате STL.

Для добавления тела в колено трубы необходимо создать в папке/constant папку geometry, в которой будет находиться наше тело в виде файла формата stl. Само тело построено с помощью программы OpenScad [14].

На рис. 2 показан закон изменения модуля скорости в конце расчёта при условии, что кинематический коэффициент вязкости $\nu = 0.01 \text{ м}^2/\text{с}$. Графики были построены с помощью открытого графического пакета ParaView [15].



а – без внедрённого тела

б – с телом внутри

Рис. 2. Течение жидкости в колене трубы (конец расчёта)

При отсутствии тела внутри расчётной области максимальное значение скорости течения жидкости наблюдается в правой её части. При этом скорость немного уменьшается при движении к выходу из колена трубы. Из анализа рис. 2, б следует, что скорость течения жидкости уменьшается перед внедрённым телом, затем жидкость обтекает тело, а скорость её движения немного увеличивается.

В дальнейшем предполагается рассмотреть случай, когда кинематическая вязкость жидкости не является постоянной, а зависит, например, от времени. Для этого в исходном коде решателя в файле icoFoam.C нужно будет заменить лапласиан

```
fvm :: laplacian(nu , U)
```

например на

```
fvm :: laplacian(nu*(1+runTime.elapsedCpuTime() * 100) , U)
```

Функция `runTime.elapsedCpuTime()` возвращает время, прошедшее с момента запуска расчёта. Таким образом, значение кинематического коэффициента вязкости будет увеличиваться с каждым шагом по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный сайт OpenFOAM. URL: <http://openfoam.org> (дата обращения 05.01.2023).
2. *Панкратов И.А.* Математическое моделирование реальных процессов в пакете OpenFOAM. Саратов: Саратовский источник, 2019. 61 с.
3. *Greenshields C.* OpenFOAM User Guide version 10/ C.Greenshields. URL: <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v10/> (дата обращения 05.01.2023).
4. *Панкратов И.А.* Математическое моделирование некоторых нестационарных течений жидкости средствами пакета OpenFOAM // Моделирование. Фундаментальные исследования, теория, методы и средства: материалы 17-й Международ. науч.-практ. конф. (Новочеркасск, 26-27 сент. 2017 г.). Новочеркасск: Лик, 2017. С. 63-67.
5. *Блинков Ю.А.* Расчёт обтекания шара с помощью стандартных решателей OpenFOAM / Ю.А. Блинков, И.А. Панкратов, К.Р. Симонова // Математика. Механика. 2018. № 20. С. 94-96.
6. *Медведева Л.В.* Расчёт течений мелкой воды методом конечных объёмов / Л.В. Медведева, И.А. Панкратов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика, 2017. Т. 5, № 7-1. С. 162-165.
7. FluentMeshToFoam. URL: <https://openfoamwiki.net/index.php/FluentMeshToFoam> (дата обращения 05.01.2023).
8. SnappyHexMesh. URL: <https://openfoamwiki.net/index.php/SnappyHexMesh> (дата обращения 06.01.2023).
9. TheStLFormat. URL: http://www.fabbers.com/tech/STL_Format (дата обращения: 06.01.2023).
10. *Читалов Д.И.* Разработка приложения для подготовки расчетных сеток посредством утилиты snappyHexMesh программной среды OpenFOAM / Д.И. Читалов, С.Т. Калашников // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31, № 4. С. 715-722.
11. *Иванов Д.А.* Автоматизация постпроцессинга при решении задач механики в CAD/CAE системах / Д.А. Иванов, В.С. Кожанов // Математика. Механика. 2021. № 23. С. 84-87.
12. *Иванов Д.А.* Автоматизация построения расчётных областей для метода конечных объёмов / Д.А. Иванов, В.С. Кожанов // Математика. Механика. 2022. № 24. С. 71-74.
13. *Панкратов И.А.* О реализации информационной системы пре-процессинга данных для численных экспериментов / И.А. Панкратов, К.Р. Симонова // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 1. С. 6-18.
14. OpenSCAD Documentation. URL: <https://openscad.org/documentation.html> (дата обращения 05.01.2023).
15. Официальный сайт Para View. URL: <http://www.paraview.org> (дата обращения 06.01.2023).

УДК 621.438:004.942

Ю. Н. Шулева, М. Е. Соловьев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: yuliya5153063506@mail.ru,
soloviev56@gmail.com

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ЛОПАТОК ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Предлагаемая статья посвящена автоматизации проектирования лопаток газотурбинных двигателей. Рассматривается использование многопараметрических моделей для детального описания геометрических характеристик лопаток ГТД. Ключевым аспектом исследования является применение аппроксимации профилей лопаток с использованием ортогональных полиномов Лежандра, что способствует улучшению качества и точности газодинамических расчетов. Предложена методика аппроксимации профиля лопаток, удобная для использования в системах автоматизации проектирования и обеспечивающая высокий коэффициент достоверности аппроксимации.

Ключевые слова: газотурбинные двигатели, геометрическое проектирование лопаток, ортогональные полиномы Лежандра, аппроксимация профилей лопаток

Y. N. Shuleva, M. E. Soloviev

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: yuliya5153063506@mail.ru,
soloviev56@gmail.com

PARAMETRIC MODELING OF GAS TURBINE ENGINE BLADE PROFILES

The proposed article is dedicated to the automation of gas turbine engine blade design. It discusses the use of multiparametric models for detailed description of the geometric characteristics of GTE blades. A key aspect of the research is the application of blade profile approximation using orthogonal Legendre polynomials, which enhances the quality and accuracy of gasdynamic calculations. A method for blade profile approximation is proposed, convenient for use in automated design systems and providing a high coefficient of approximation reliability.

Keywords: gas turbine engines, geometric design of blades, orthogonal Legendre polynomials, blade profile approximation

Надежность лопаток газотурбинного двигателя (ГТД) играет ключевую роль в обеспечении продолжительного срока службы двигателя [1-2]. Проектирование лопаток требует детального анализа и учета параметров, таких как геометрическая форма, выбор оптимальных материалов и применение специальных покрытий. Геометрия сечения лопаток газотурбинных двигателей представляет собой сложную структуру, изменяющуюся в зависимости от типа двигателя и функциональных особенностей рабочего колеса турбины [3-5]. Существенным аспектом в ходе этого процесса является точный перенос указанного профиля лопатки в системы компьютерного проектирования (CAD) в процесс изготовления (CAM), а также в инженерно-аналитический пакет [6-8].

Традиционные методы формирования чертежей лопаток в основном требуют ручной работы, что способствует разработке параметрического моделирования для автоматизации этих процессов. Индексные обозначения профилей NASA, изначально предназначенные для аэродинамических профилей, успешно адаптированы для применения в профилях лопаток газотурбинных двигателей и используются в настоящее время [9]. Однако, с увеличением сложности конструкций ГТД, применение простых систем для описания основных геометрических параметров лопаток становится недостаточным. В результате этого были предложены различные варианты многопараметрических моделей, позволяющих более точно и полно охарактеризовать форму и характеристики лопаток в контексте их функционального применения в газотурбинных двигателях. Алгоритм девятипараметрической модели RATD (Rapid Axial Turbine Designe) обеспечивает быстрое формирование профиля сечения лопатки, при этом сохраняя достаточную гибкость для учета различных вариантов профилей [10]. Однако в процессе практического применения RATD были выявлены определенные недостатки, включая неудобства при оптимизации геометрии профиля и недостаточную точность. В связи с этим в работе [11] была представлена модифицированная версия данной модели MRATD (Modified Rapid Axial Turbine Designe), включающая большее число параметров.

В отечественной практике активно разрабатываются алгоритмы для автоматизированного построения профилей лопаток [12-14]. Тем не менее, на данный момент не существует универсального метода параметрического моделирования профилей лопаток ГТД. Выбор конкретной методики зависит от целей моделирования и особенностей конкретного разрабатываемого двигателя.

Исходя из вышеизложенного, в настоящей работе рассматривается применение метода аппроксимации профилей лопаток, основанного на использовании ортогональных полиномов Лежандра [15].

При использовании ортогональных полиномов Лежандра для аппроксимации профилей лопаток рассматривается весь профиль лопатки как единое целое, а не набор отдельных функций. Этот метод включает аппроксимацию одним ортогональным полиномом девятой степени. Основное преимущество этого подхода заключается в линейной независимости коэффициентов, вычисленных методом наименьших квадратов, что позволяет единообразно рассматривать различные профили.

Аппроксимацию профиля лопатки с помощью ряда полиномов Лежандра девятой степени можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{i=0}^9 a_i L_i(x), \quad (1)$$

где a_i - коэффициенты, которые являются параметрами модели; $L_i(x)$ - полиномы Лежандра, которые вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1, \\ L_1 &= x, \\ L_2 &= (3x^2 - 1)/2, \\ L_3 &= (5x^3 - 3x)/2, \\ L_4 &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, \\ L_5 &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8, \\ L_6 &= 231/16x^6 - 315/16x^4 + 105/16x^2 - 5/16, \\ L_7 &= 429/16x^7 - 693/16x^5 + 315/16x^3 - 35/16x, \\ L_8 &= 6435/128x^8 - 3003/32x^6 + 3465/64x^4 - 315/32x^2 + 35/128, \\ L_9 &= 12155/128x^9 - 6435/32x^7 + 9009/64x^5 - 1155/32x^3 + 315/128x. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты аппроксимирующего полинома определяются методом наименьших квадратов из условия минимума суммы квадратов разностей между заданными значениями y_i^c , рассчитанными согласно уравнению регрессии (1):

$$\hat{a}_i = \sum_{i=1}^N (y_i^c - y(a_i, x_i))^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Оценки коэффициентов \hat{a}_i вычисляются с помощью формулы регрессионного анализа:

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y, \quad (4)$$

где a – обозначение для вектора оценок коэффициентов; y – обозначение для вектора точек заданного профиля y_i^c .

Точность приближения модели измеряется с помощью коэффициента детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y(x_i) - y_i^c)^2}{\sum(y^c - y_i^c)^2}, \quad (5)$$

где $\overline{y^c}$ - среднее значение y_i^c .

При хорошей аппроксимации значение R^2 должно быть близким к единице.

В ходе данного исследования было разработано программное решение на алгоритмическом языке Python для автоматической обработки исходных профилей, заданных в цифровой форме. Программа способна выполнять вычисление коэффициентов аппроксимирующих полиномов линий профиля лопатки, а также представлять результаты в виде графиков, на которых наглядно показаны исходные точки и приближенные кривые для различных сегментов лопатки. Кроме того, она может архивировать начальные точки профиля, значения коэффициентов и коэффициент детерминации в базу данных. Программа также обеспечивает создание DXF-файлов на основе точек аппроксимационных функций для дальнейшего использования в САД-системах и системах инженерного анализа.

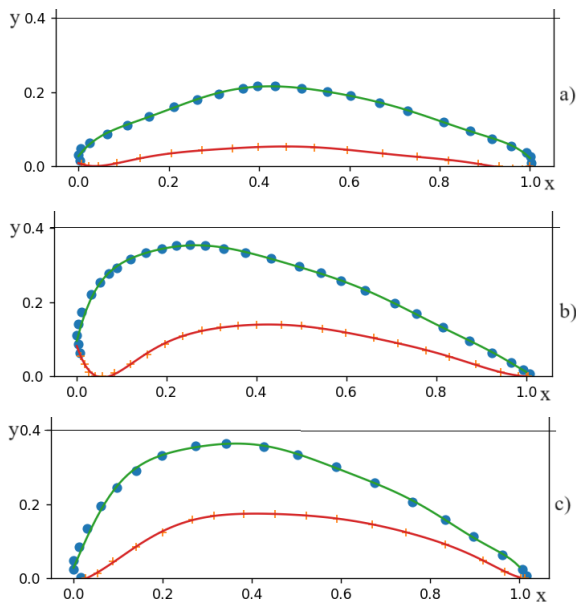


Рис. 1. Начальные точки профилей, соответствующих различным типам газотурбинных двигателей и соответствующие им аппроксимирующие линии. Источники профилей: а – [1], б – [16], с – [17]

На рис. 1 приведены примеры аппроксимации профилей с использованием предложенной методики для различных типов газотурбинных двигателей: профиль пера лопатки, приведенный в работе [1], профиль лопатки высокоэффективного ГТД высокого давления, разработанный NASA [16] и профиль типа P5140 с однопараболической спинкой (Bezier 2-го порядка) и двухпараболическим корытцем (две кривые Bezier 2-го порядка) [17].

Степень кривизны профиля лопатки удобно характеризовать параметрами, аналогичными используемым в четырехиндексном обозначении профилей NASA: отношением ординаты и абсциссы точки максимальной высоты профиля к длине хорды (y_{\max}/L , x_{\max}/L). В таблице 1 приведены значения этих параметров и коэффициенты детерминации моделей R^2 для профилей, показанных на рис. 1.

Таблица 1. Параметры аппроксимированных профилей и коэффициенты детерминации моделей, представленных на рис. 1

Параметр	[1]		[16]		[17]	
	спинка	корытце	спинка	корытце	спинка	корытце
y_{\max}/L	0,2155	0,053	0,3533	0,1394	0,3634	0,1741
x_{\max}/L	0,4242	0,3535	0,2626	0,3232	0,3636	0,303
R^2	0,995	0,9974	0,9806	0,9988	0,9815	0,9994

Как видно, профили лопаток, достаточно сильно различающиеся по форме, хорошо аппроксимируются с использованием предложенной методики, что подтверждается близкими к единице значениями коэффициентов детерминации.

Для проверки применимости методики в настоящей работе была проведена аппроксимация 30 профилей лопаток различного назначения, приведенных в разных источниках. В таблице 2 представлены диапазоны изменения параметров профилей лопаток и диапазон изменения коэффициентов детерминации математических моделей, аппроксимирующих профили из данной выборки.

Таблица 2. Диапазоны изменения параметров по выборке из 30 различных профилей лопаток и диапазон изменения коэффициентов детерминации моделей

Параметры	y_{\max}/L	x_{\max}/L	R^2
Минимальное значение по выборке	0,0426	0,1818	0,9391
Максимальное значение по выборке	0,5252	0,4747	0,9998

Близкие к единице границы диапазона изменения R^2 для изученной выборки доказывают универсальность используемой математической модели в форме ортогонального многочлена Лежандра девятой степени при аппроксимации профилей лопаток, существенно различающихся по форме. Это делает данный метод весьма эффективным для формирования базы данных параметров профилей, которые могут быть использованы в газодинамических расчетах. Такая база данных будет полезна при проектировании лопаток для газотурбинных двигателей высокого давления, где важно учитывать все характеристические особенности в профилях для оптимизации производительности и эффективности двигателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крымов В.В.* Производство лопаток газотурбинных двигателей / В.В. Крымов, Ю.С. Елисеев, К.И. Зудин. М.: Машиностроение, 2002. 376 с.
2. *Панков В.П.* Теплозащитные покрытия лопаток турбин авиационных газотурбинных двигателей / В.П. Панков, А.Л. Бабаян, М.В. Куликов // Ползуновский вестник, 2021. Вып. 1. С. 161-172.
3. *Saravanamuttoo H.I.H.* Gas turbine theory / H.I.H.Saravanamuttoo, G.F.C. Rogers, H. Cohen et al // 7th Ed. Pearson Education Limite. 2017. 606 p.
4. *Dixon S.L.* Fluid mechanics and thermodynamics of turbomachinery / S.L. Dixon, C.A. Hall // 7th Ed. Elsevier. 2014. 537 p.
5. *Tanuma T.* Development of last-stage long blades for steam turbines // Advances in steam turbines for modern power plants / Ed. by Tadashi Tanuma. Elsevier, 2017. P. 279-305.
6. *Сапронов Д.В.* Проектирование рабочего колеса газовой турбины с использованием керамических лопаток / Д.В. Сапронов, С.В. Резник // Вестник Самарского гос. аэрокосм. ун-та. 2014. Вып. 5. С. 199-206.
7. *Leloudas S.N.* Low Reynolds airfoil family for small horizontal axis wind turbines based on RG15 airfoil / S.N. Leloudas, A.I. Eskantar, G.N. Lygidakis, I.K. Nikolos // SN Applied Sciences. 2020. 371 p.
8. *Eftekhari S.* Investigation of a NACA0012 finite wing aerodynamics at low Reynold's numbers and 0° to 90° angle of attack / S. Eftekhari, A.S.M.Al-Obaidi // Journal of Aerospace Technology and Management. 2019. 11 p.
9. *Jackobs E.N.* The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable-density Wind Tunnel / E.N. Jackobs, K.E. Ward, R.M. Pinkerton // NACA Report. 1933. 460. 61 p.
10. *Pritchard L.J.* An eleven parameter axial turbine airfoil geometry model // ASME. 1985. 12 p.
11. *Mansour T.* Implicit Geometric Representation of Gas Turbine Blades For Optimal Shape Design // Tarek Mansour. 2005. 95 p.
12. *Виноградов Л.В.* Аналитическое профилирование лопатки турбины // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2012. Вып. 4. С. 43-47.

13. *Виноградов Л.В.* Автоматизированное проектирование лопаток турбин с параболическими обводами / Л.В. Виноградов, А.В. Костюлов // Известия МГТУ «МАМИ». 2013. Вып. 1. С. 41-47.
14. *Мамаев В.К.* Моделирование решетки профилей транспортного газотурбинного двигателя / В.К. Мамаев, Л.В. Виноградов, П.П. Ощепков // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования 2019. Вып. 20. С. 140-146.
15. *Beals R.* Special Functions and Orthogonal Polynomials (Cambridge Studies in Advanced Mathematics) / R. Beals, R. Wong // Cambridge: Cambridge University Press, 2016. 437 p.
16. *Timko L.P.* Energy efficient engine high pressure turbine component test performance report // NASA CR-168289. NASA: NASA Lewis Research Center. 1984. 173 p.
17. *Виноградов Л.В.* Профиль лопатки турбины из кривых Bezier / Л.В. Виноградов, А.П. Алексеев, А.В. Костюлов // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2013. Вып. 3. С. 10-15.

Содержание

МАТЕМАТИКА

1. **Абрамов В.В.** К вопросу об устойчивости нулевого решения неавтономной периодической системы дифференциальных уравнений..... 3
2. **Башкин М.А.** Классификация однородных нерасщепимых супермногообразий с сигнатурой $9, 6, 3, 2$ 10
3. **Кельзон А.А., Белякова Л.В.** О непрерывности (m, Φ) -вариации функции..... 14
4. **Ройтенберг В.Ш.** О дифференциальных уравнениях второго порядка, имеющих первую степень негрубости 20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

5. **Белякова Л.В., Гулевич Н.М., Кузнецов В.О.** Теорема Штольца и ее обобщения..... 33
6. **Березина Л.В., Васильева А.В., Бурцев А.И.** Сравнительный анализ решаемости одного из видов задач, предлагаемых на Всероссийской студенческой математической олимпиаде..... 42
7. **Васильева А.В., Березина Л.В., Бурцев А.И.** Задачи всероссийской студенческой математической олимпиады имени П.А. Соловьева..... 45
8. **Гулевич Н.М., Кузнецов В.О., Белякова Л.В., Старостина С.А.** Олимпиады ГУМРФ по математике в 2022-2023 учебном году..... 53
9. **Жаров А.Н., Миничева И.Г.** Расчет стационарного одномерного температурного поля по методу конечных элементов..... 63
10. **Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш.** Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2023 года..... 73
11. **Ройтенберг В.Ш., Сидорова Л.А.** Теоремы о среднем и среднее значение функции в курсе математики..... 86
12. **Сапогов В.Р.** Частные производные в метрологии..... 94
13. **Хритина Ю.И., Бельман С.А.** Особенности познавательной и учебной мотивации..... 97

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

14. **Алов В.А., Горовой Ю.М., Попков А.Н.** Оптимизация модифицирования чугуна в ковше экзотермическими таблетками 105

15. Балунов А.И. Принцип дихотомии в оптимизации процесса ректификации.....	118
16. Гусаров А.В. Математическая модель системы регулирования положения электронного луча.....	129
17. Иванов А.И., Антошкин В.А. Обучение нейросети с подкреплением для игры Block Revolution.....	135
18. Лискина Е.Ю., Силантьева И.А. Исследование четырехфакторной динамической модели рынка труда с мультипликативной производственной функцией.....	138
19. Макарьин В.В. Расчет плотности водных растворов этилового спирта.....	145
20. Малышев Д.В., Соловьев М.Е., Балдаев С.Л. Определение оптимального шага нанесения дорожки порошкового покрытия...	153
21. Марьясин О.Ю., Плохотнюк А.Н., Тихомиров Л.И. Моделирование и управление режимами работы «умных» электрических сетей.....	160
22. Панкратов И.А., Салтыков Н.А. Математическое моделирование течения жидкости в колене трубы средствами OpenFOAM....	170
23. Шулева Ю.Н., Соловьев М.Е. Параметрическое моделирование профиля лопаток газотурбинных двигателей.....	175

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 19

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 05.03.24. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.
Гарнитура Таймс. Офсетная печать
Усл. печ. л. 10,69. Тираж 25. Заказ 7.

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Отпечатано в Копировальном центре ЯГТУ
152023, Ярославль, Московский пр., 88