ПРИМЕРЫ ОЛИМПИАД ПРОШЛЫХ ЛЕТ

2019 год

1. Решить матричное уравнение , где , , .

2. Пусть , , . Доказать, что .

3. Пусть ,  и – произвольные точки в пространстве. Доказать, что

.

4. Написать канонические уравнения прямой, являющейся проекцией прямой  на плоскость .

5. На кривой  найти точку с наибольшей ординатой.

6. Найти все функции , , такие, что для любого  .

7. Существует ли производная  для функции ? Если существует, то чему она равна?

8. Сколько корней имеет уравнение ?

2020 год (с решениями)

1. На плоскости произвольно выбраны 4 точки так, что любые три из них являются вершинами некоторого треугольника. Доказать, что хотя бы один из этих треугольников не является остроугольным.

*Решение*. Пусть  и  – выбранные точки. Если треугольник  не является остроугольным, то утверждение доказано. Пусть треугольник  остроугольный.

Рассмотрим сначала случай, когда  – внутренняя точка . Так как сумма углов ,  и  равна , то хотя бы один из них тупой и соответствующий треугольник – тупоугольный.

Пусть теперь  находится вне . Прямая, содержащая одну из сторон треугольника , для определенности пусть прямая, делит плоскость на две полуплоскости так, что точки  и  лежат в разных полуплоскостях. Если  не является остроугольным, то утверждение доказано. Пусть  – остроугольный. Тогда в треугольниках  и  хотя бы один из углов  и  не является острым, поскольку сумма углов в четырехугольнике  +++=.

1. Найти все матрицы , перестановочные с квадратной матрицей третьего порядка  с элементами , если  или , и  для остальных  и , то есть такие, что .

*Решение*. Пусть матрица  перестановочна с матрицей , то есть

.

Это равенство равносильно тому, что , , , , где и – произвольные числа. Итак,

, где и – произвольные числа.

1. По прямому каналу шириной 5м плывет прямоугольный плот длиной 6м и шириной 4м. Канал делает поворот под прямым углом. Сможет ли плот пройти поворот?

*Решение*. Выберем оси координат как изображено на рисунке.















Пусть – сторона плота длины 6м, а точки  и  находятся, соответственно, на осях  и . Пусть . Тогда ,  и уравнение прямой  можно записать в виде . Расстояние от угловой точки  до прямой  равно

.

Обозначим . Так как , то . Следовательно

.

Поэтому при всех  расстояние от плота до точки  и, тем более, до любой другой точки внутреннего берега канала будет положительным и плот сможет развернуться на повороте.

1. Ограничено ли множество на плоскости , заданное неравенством ?

*Решение*. Перейдем в неравенстве к полярным координатам. Получим неравенство

.

При  оно принимает вид , где 

Это квадратное неравенство относительно . Так как для любого  , то неравенство имеет положительные решения, если  и . Тогда

.

Таким образом, все точки рассматриваемого множества находятся на расстоянии  от начала координат, то есть множество ограничено.

1. При каждом  сравнить значения функций

 и.

*Решение*. При любом 

,

поскольку  , . Следовательно,

при любом  .

**6.** Последовательность  задана равенствами ,  при . Доказать, что последовательность сходится; найти ее предел.

*Решение*. Докажем, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству

. (\*)

При  оно верно. Пусть оно верно при . Тогда оно верно и при :

.

По принципу математической индукции неравенство (\*) верно для любого натурального .

Так как вследствие (\*) для любого 

,

то последовательность возрастает. Согласно (\*) она ограниченна сверху и потому сходится, а ее предел . Переходя к пределу в равенстве , получаем , , .

1. Сколько решений имеет уравнение ?

*Решение*. Обозначим . Так как ,, а при всех  , то уравнение имеет на промежутке  единственный корень.

При  заменим уравнение на равносильное , где . Так как , то  при ,  при . Поскольку , , , то  – единственный корень на промежутке , а  – единственный корень на промежутке . Таким образом, уравнение  имеет ровно три корня.

1. Найти .

*Решение*. Так как  – нечетная функция, то  и потому ,.

1. Вычислить .

*Решение*. Интегрируя по частям, получаем

.

Используя правило Лопиталя, находим

.

1. Найти решение  дифференциального уравнения , удовлетворяющее начальному условию .

*Решение.* Перепишем уравнение в виде  и сделаем замену . Получим уравнение с разделяющимися переменными  и начальное условие . Разделяя переменные, получаем , , . Поскольку , то , , , Учитывая, что , получаем искомое решение:

.

Оно определено на любом интервале , в точках которого подкоренное выражение положительно. Нетрудно убедиться, что максимальным интервалом, на котором формула  дает решение, является интервал , где  – единственное решение уравнения .

1. Найти все непрерывные функции , , такие, что 

.

*Решение*. Перепишем уравнение для  в виде

.

Если это равенство верно при всех , то функция  дифференцируема и производные от обеих частей равенства равны:

,.

Обозначим . Тогда , , и потому , где  и  – некоторые постоянные. Так как , то , . Подставляя эту функцию в первоначальное уравнение, получаем , .

Поэтому  – является решением только при , то есть .

1. Сходится ли ряд , где ?

*Решение*. Так как , то при  ,

, .

Так как ряд  сходится, то сходится и ряд .